

Lincoanderson Oliveira Dantas

# **Efeitos não-inerciais em Anéis Quânticos**

**João Pessoa**

**26 de março de 2015**



Lincoanderson Oliveira Dantas

## **Efeitos não-inerciais em Anéis Quânticos**

Tese apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação do Departamento de Física, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr<sup>o</sup> Claudio Benedito Silva Furtado

João Pessoa

26 de março de 2015

---

Lincoanderson Oliveira Dantas

Efeitos não-inerciais em Anéis Quânticos/ Lincoanderson Oliveira Dantas. –  
João Pessoa, 26 de março de 2015-  
121 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Profº Drº Claudio Benedito Silva Furtado

Tese (Doutorado) – Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física, 26 de março de 2015.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade xxx. III.  
Faculdade de xxx. IV. Título

CDU 02:141:005.7

---

Lincoanderson Oliveira Dantas

## **Efeitos não-inerciais em Anéis Quânticos**

Tese apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação do Departamento de Física, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Trabalho aprovado. João Pessoa, 26 de março de 2015:

---

**Profº Drº Claudio Benedito Silva  
Furtado**  
Orientador

---

**Profº Drº Knut Bakke Filho**  
Examinador Interno

---

**Profº Drº José Roberto Soares do  
Nascimento**  
Examinador Interno

---

**Profº Drº Claudionor Gomes Bezerra**  
Examinador Externo - UFRN

---

**Profº Drº Carlos Chesman**  
Examinador Externo - UFRN

João Pessoa  
26 de março de 2015



*Dedico este trabalho à minha esposa  
e aos meus pais.*





# Agradecimentos

Nossas vidas são pautadas por decisões e indecisões. No último semestre da graduação, as incertezas a respeito do futuro começaram a tomar conta de mim. Àquela época, estava pretendendo prestar um concurso para soldado da Polícia Militar. Duas pessoas foram muito importantes na minha mudança de decisão: meu orientador Claudio Furtado e minha cunhada Emmanuela. A contribuição de Emmanuela foi quanto à parte pessoal e emocional – ela, por me conhecer desde moleque, sabia que eu não suportaria a travas impostas pela hierarquia militar. Numa conversa informal, Claudio conseguiu me fazer continuar na vida acadêmica. Não lembro bem o teor da conversa, mas o que eu não esqueço é que, em tom de brincadeira, Claudio disse algo do tipo: “Não dá pra ficar rico sendo físico, mas a gente acaba virando turista profissional...”. De certa forma era o que eu precisava ouvir para continuar. Desde a Iniciação Científica até o Doutorado tive Claudio como orientador e mais do que física, aprendi com ele a arte de ter paciência e de respeitar os limites de quem nos cerca. Não fui um de seus melhores alunos, talvez o que mais deu trabalho, mas em momento algum ouvi uma cobrança mais severa, uma exposição de meus defeitos ou fui diminuído pelas minhas limitações. Exatamente na contramão de tudo isso, o que ouvia eram palavras de estímulo que me empurravam para frente – talvez ele acreditasse mais em mim do que eu mesmo. Em face de tudo isso, o que apenas me resta é dizer “muito obrigado por tudo”.

Outra pessoa importantíssima nesse processo a quem dedico palavras de agradecimento é a minha esposa Danielle. Há dois anos ela tem acompanhado de perto essa fase da minha vida. Graças ao seu carinho, paciência e compreensão, ficou mais fácil concluir esta etapa. Muito obrigado Maga!

Aos amigos Clóvis Sérgio Jr e Gabriel Melo registro aqui os meus sinceros agradecimentos pela grande ajuda na edição e confecção de algumas das ilustrações utilizadas neste trabalho.

Agradeço também aos amigos Geilson Jr, Jonas Romero, Samuel Bezerra e Adriano Sampiere pelo ambiente harmonioso que conseguimos construir, e a Jilvan Lemos pelas frequentes injeções de ânimo. Também não posso me esquecer de Dona Nazaré que, com seu coração de mãe, sempre me emprestava alguns de seus minutos para ouvir meus desabafos ou para, juntos, rirmos de nada.

Finalmente, devo meus sinceros agradecimentos aos novos amigos do IF Sertão PE (Eziom Alves, Felipe Pinheiro, Matheus Barros, Anderson Reis, Bárbara Quirino, Juliana Figueiroa) pela amizade e pela motivação constantes. Em especial, quero agradecer a Daniel Souza e a Vera Filha pelo companheirismo sem igual que vocês me ofereceram nessa reta final.



# Resumo

Neste trabalho, investigamos pela primeira vez na literatura o impacto de efeitos não-inerciais associados com a rotação do sistema de referência de partículas carregadas e neutras confinadas por um anel quântico, descrito pelo potencial de Tan-Inkson. A contribuição da rotação é introduzida através de seu acoplamento com o momento angular do sistema. Mostramos que a rotação entra como uma espécie de acoplamento mínimo na parte cinética do Hamiltoniano que descreve a dinâmica quântica dos sistemas em questão. Com isso, mostramos que a rotação induz efeitos típicos de campos magnéticos sobre as propriedades quânticas das partículas. Também investigamos os efeitos da contribuição de uma deslocação tipo-hélice sobre as propriedades físicas das partículas. O defeito topológico contribui como uma fonte de fluxo de torção, tendo um comportamento similar ao do fluxo Aharonov-Bohm. Além de partículas carregadas (elétrons e buracos), estudamos os efeitos da rotação sobre partículas neutras em três cenários diferentes: uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente acoplado pela interação proposta por Aharonov-Casher; uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico permanente acoplada pela interação proposta por He-McKellar-Wilkens e uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido pela interação proposta por Wei-Han-Wei. Em todos os três casos mostramos que existe uma estreita analogia entre partículas neutras e carregadas. A metodologia utilizada consiste em analisar a dinâmica quântica não-relativística dessas partículas via resolução da equação de Schrödinger. Além do espectro de energia e das funções de onda, calculamos as correntes persistentes e a magnetização para os quatro sistemas aqui estudados, e também analisamos, a partir da expressão para a corrente persistente para anéis quânticos, o caso limite para pontos quânticos.

**Palavras-chaves:** Rotação, Anéis Quânticos, Defeitos Topológicos, Corrente Persistente, Magnetização.



# Abstract

In this thesis, we investigate by the first time the impact of non-inertial effects associated with the rotation of the reference system on charged and neutral particles confined by a quantum ring, which is described by the potential of Tan-Inkson. The contribution of the rotation is introduced by its coupling with angular momentum of the system. We show that the rotation is introduced via a non-minimum coupling to the kinetic part of the Hamiltonian describing the quantum dynamics of systems studied here. Thus, we show that non-inertial effects of the rotation induce on the quantum properties of the particles similar effects generated by a magnetic field. We also investigated the contribution of a screw dislocation on the physical properties of the particles. The topological defect contributes as a torsion source, presenting a contribution similar to the Aharonov-Bohm flux. Besides charged particles (electrons and holes), we also study the effects of rotation on neutral particles in three different scenarios: a neutral particle with a permanent magnetic dipole moment coupled by the Aharonov-Casher interaction; a neutral particle with a permanent electric dipole moment coupled by the interaction proposed by He-McKellar-Wilkens and a neutral particle with an electric dipole moment induced by the field configuration proposed by Wei-Han-Wei. In all three cases it is shown the similarity between the neutral and charged particles. We analyze the non-relativistic quantum dynamics of these particles by solving the Schrödinger equation. In addition to the energy spectrum and wave functions, we calculate the persistent current and the magnetization for the four systems studied here, and we also analyzed, from the expression for the persistent current for quantum rings, the limit case for quantum dots.

**Key-words:**Rotation, Quantum Rings, Topological Defects, Persistent Currentes, Magnetization.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Imagem de um anel quântico produzida com auxílio de um microscópio de força atômica, retirada da referência [1]. . . . .	18
Figura 2 – Visão lateral do Potencial de Tan-Inkson. . . . .	20
Figura 3 – Visão do vale central do Potencial de Tan-Inkson que permite visualizar a região de confinamento anelar. . . . .	20
Figura 4 – Corte do Potencial de Tan-Inkson que descreve um anel quântico com $r_0 = 800 \text{ nm}$ . . . . .	21
Figura 5 – Sistema não-inercial fixo no P girando com velocidade de rotação $\Omega$ em torno do eixo $\hat{z}$ . . . . .	22
Figura 6 – Representação esquemática de uma deslocação tipo-hélice e do vetor de Burgers $\mathbf{b}$ . . . . .	23
Figura 7 – Ilustração do campo magnético e potencial vetor para o solenóide. Figura extraída da referência [2]. . . . .	28
Figura 8 – Representação esquemática para observação do efeito Aharonov-Bohm. . . .	28
Figura 9 – Padrão de interferência observado no experimento realizado por Tonomura [3]. Figura extraída da referência [2]. . . . .	29
Figura 10 – Ilustração do efeito Aharonov-Casher. Partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente $\boldsymbol{\mu}$ interagindo com o campo elétrico criado por uma distribuição linear de cargas elétricas. . . . .	48
Figura 11 – Ilustração do efeito He-McKellar-Wilkins. Partícula neutra com momento de dipolo elétrico permanente $\mathbf{d}$ interagindo com o campo elétrico criado por uma distribuição linear monopolos magnéticos. . . . .	68





# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>17</b>
Anéis quânticos	18
Dinâmica de Partículas sob Efeitos Não-Inerciais	21
Defeitos Topológicos - Deslocação Tipo-Hélice	22
Lista de Publicações	25
<b>1 Efeitos Não-Inerciais em Partículas Carregadas</b>	<b>27</b>
1.1 Introdução	27
1.2 Partículas Carregadas em Anéis Quânticos sob Rotação	30
1.2.1 Anel Quântico sob Rotação em um Espaço Plano	32
1.2.2 Anel Quântico sob Rotação no Espaço de uma Deslocação Tipo-Hélice	36
1.2.3 Corrente Persistente	40
1.2.3.1 Limite para o ponto quântico	42
1.2.4 Magnetização	43
1.3 Considerações Finais	45
<b>2 Efeitos Não-Inerciais sobre a Dinâmica Quântica de um Dipolo Magnético</b>	<b>47</b>
2.1 Introdução	47
2.2 Partícula Neutra com Momento de Dipolo Magnético Confinada em um Anel Quântico sob Rotação	49
2.2.1 Anel Quântico sob Rotação em um Espaço Plano	52
2.2.2 Anel Quântico sob Rotação no Espaço de uma Deslocação Tipo-Hélice	56
2.2.3 Corrente Persistente	61
2.2.3.1 Limite para o ponto quântico	61
2.2.4 Magnetização	63
2.3 Considerações Finais	64
<b>3 Efeitos Não-Inerciais sobre a Dinâmica Quântica de um Dipolo Elétrico Permanente</b>	<b>67</b>
3.1 Introdução	67
3.2 Partícula Neutra com Momento de Dipolo Elétrico Permanente Confinada em um Anel Quântico sob Rotação	69
3.2.1 Anel Quântico sob Rotação em um Espaço Plano	71
3.2.2 Anel Quântico sob Rotação no Espaço de uma Deslocação Tipo-Hélice	76
3.2.3 Corrente Persistente	80
3.2.3.1 Limite para o ponto quântico	81
3.2.4 Magnetização	82
3.3 Considerações Finais	84

<b>4</b>	<b>Influência da Rotação na Dinâmica Quântica de uma Partícula Neutra com Momento de Dipolo Elétrico Induzido Confinada em um Anel . . . . .</b>	<b>85</b>
4.1	Introdução . . . . .	85
4.2	Partícula Neutra com Momento de Dipolo Elétrico Induzido Confinada em um Anel Quântico sob Rotação . . . . .	86
4.2.1	Anel Quântico sob Rotação em um Espaço Plano . . . . .	89
4.2.2	Anel Quântico sob Rotação no Espaço de uma Deslocação Tipo-Hélice	94
4.2.3	Corrente Persistente . . . . .	98
4.2.3.1	Limite para o ponto quântico . . . . .	99
4.2.4	Magnetização . . . . .	100
4.3	Considerações Finais . . . . .	102
	<b>Conclusões . . . . .</b>	<b>103</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>109</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>115</b>
	<b>APÊNDICE A Limites Assintóticos para a Equação Radial . . . . .</b>	<b>117</b>
	A.1 Limites Assintóticos para a Equação Radial . . . . .	117
	<b>APÊNDICE B Função Hipergeométrica Confluente . . . . .</b>	<b>119</b>
	B.1 Função Hipergeométrica Confluente . . . . .	119
	B.2 Integral Envolvendo a Função Hipergeométrica Confluente . . . . .	119
	B.3 Normalização . . . . .	120

# Introdução

Quando átomos são resfriados a temperaturas próximas do zero absoluto, uma série de efeitos quânticos começa a aparecer. Um desses efeitos é a condensação de Bose-Einstein, que descreve a formação de uma nova fase quântica da matéria. Ao se resfriar um gás de bósons (partículas de spin inteiro), a partir de uma dada temperatura crítica muito próxima do zero absoluto, o sistema passa por uma transição de fase; uma fração considerável dos átomos que constituem o gás evolui para o estado quântico de mais baixa energia. Dizemos, portanto, que esses átomos se condensaram no estado fundamental. Nesse ponto, efeitos quânticos macroscópicos, como, por exemplo, superfluidez e supercondutividade, se tornam aparentes. Esse novo estado da matéria foi predito teoricamente entre os anos de 1924 e 1925 por Satyendra Nath Bose e Albert Einstein.

Uma característica fundamental dos condensados Bose-Einstein é sua resposta à rotação [4, 5, 6]. Parte da técnica de resfriamento de átomos consiste em confiná-los em armadilhas e depois resfriá-los através da aplicação de um campo magnético efetivo obtido por rotação rápida da armadilha ou pela aplicação de um laser.

Essa relação entre condensados de Bose-Einstein e rotação chamou nossa atenção e nos levou a investigar como efeitos não-inerciais associados à rotação do sistema de referência influenciam a dinâmica quântica de partículas neutras confinadas em anéis quânticos. Como não haviam resultados prévios na literatura, também estendemos os estudos de efeitos não-inerciais sobre partículas carregadas.

Desse modo, propomos analisar a dinâmica quântica não-relativística de partículas carregadas e neutras, via resolução da equação de Schrödinger. Além do espectro de energia e das funções de onda, calcularemos as correntes persistentes e a magnetização para todos os sistemas aqui apresentados, e também analisaremos, a partir da expressão para a corrente persistente para anéis quânticos, o caso limite para pontos quânticos.

O capítulo (1) é destinado ao estudo de partículas carregadas, enquanto nos capítulos (2), (3) e (4) serão estudados efeitos análogos para o dipolo magnético permanente, dipolo elétrico permanente e para o dipolo elétrico induzido, respectivamente. Ao final, no capítulo [Conclusões](#), será apresentado um sumário dos resultados obtidos, ressaltando o papel de destaque que efeitos não-inerciais associados à rotação do sistema de referência trazem para os quatro sistemas aqui estudados.

Ainda neste capítulo, apresentamos uma breve revisão sobre anéis quânticos, incluindo a descrição do potencial de Tan-Inkson. Em seguida, apresentamos o Hamiltoniano que descreve a dinâmica quântica de partículas sob rotação. Na seção seguinte, será apresentada uma breve revisão sobre defeitos topológicos, com foco especial na deslocação

tipo-hélice. Ao final, apresentamos uma lista de trabalhos publicados ou a publicar que foram frutos desta Tese.

## Anéis quânticos

Em essência, anéis quânticos são nanoestruturas geralmente construídas em materiais semicondutores que, através de confinamento quântico, restringem o movimento de partículas a uma região bidimensional com geometria anelar. A figura (1) nos dá uma boa

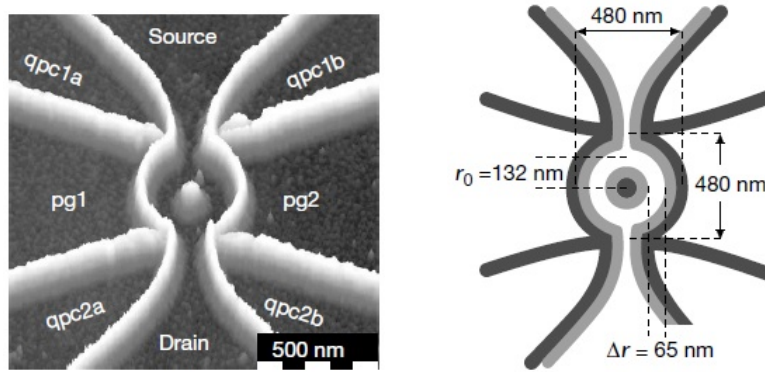


Figura 1 – Imagem de um anel quântico produzida com auxílio de um microscópio de força atômica, retirada da referência [1].

ideia do que vem a ser um anel quântico. A figura da esquerda é uma imagem retirada com um auxílio de um microscópio de força atômica e na figura da direita, é apresentado um layout dando as dimensões típicas do sistema.

Nos últimos anos, o estudo de partículas carregadas confinadas em anéis quânticos tem chamado muita atenção devido a possibilidade de diversas aplicações em várias áreas da Física [7]. Anéis com dimensões mesoscópicas são considerados como ótimos laboratórios para investigação de efeitos de interferência quântica; quando colocados na presença de campos externos, apresentam uma série de fenômenos físicos muito interessantes, como, por exemplo, o efeito Aharonov-Bohm [8, 9], o efeito Hall quântico [10], a interação spin-órbita [11], correntes persistentes [12, 13, 14] e a fase quântica de Berry [15, 16].

Desde meados de 1980, o desenvolvimento experimental com relação à produção de anéis quânticos bidimensionais cada vez menores tomou patamares expressivos, permitindo a realização de experimentos cada vez mais próximo do limite quântico real.

Um dos métodos de fabricação consiste em utilizar técnicas de litografia que permitem construir anéis individuais na superfície de materiais semicondutores [17, 18, 1]. Outra técnica consiste em obter anéis a partir de pontos quânticos. Essa técnica é baseada no método de Stranski-Krastanov que permite crescer epitaxialmente pontos quânticos. Depois do processo de crescimento, o material do centro do ponto quântico é ejetado,

criando-se um padrão semelhante à cratera de um vulcão. Mais detalhes podem ser encontrados na seguinte referência [19].

Em 2004, Viefers et al. [20] publicaram um ótimo artigo de revisão sobre anéis quânticos. Em 2012, em complemento ao trabalho de Viefers, Mannine et al. [21] apresentam considerações sobre bósons e férmions em anéis quânticos.

Com o grande número de resultados experimentais sobre anéis quânticos, modelos teóricos capazes de explicar esses resultados se faziam necessários. Muitas propriedades conseguiam ser explicadas com um modelo simples de anéis unidimensionais com apenas um elétron. Em contrapartida, esse modelo negligenciava os efeitos importantes associados com a espessura da região de condução.

Em 1996, Tan e Inkson [22] propuseram um modelo teórico que descreve analiticamente o confinamento de elétrons e buracos anéis quânticos bidimensionais. Além de anéis quânticos, o modelo de Tan-Inkson também serve para descrever outras nanoestruturas, tais como o ponto e o anti-ponto quânticos, anéis quânticos unidimensionais e fios quânticos bidimensionais.

O modelo de Tan-Inkson consiste no seguinte potencial de confinamento radial:

$$V(\rho) = \frac{a_1}{\rho^2} + a_2\rho^2 - V_0, \quad (1)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são dois parâmetros constantes e

$$V_0 = 2\sqrt{a_1 a_2}. \quad (2)$$

Muitas características do anel estão associadas com os parâmetros  $a_1$  e  $a_2$ . O raio médio do anel, por exemplo, é definido assim:

$$r_0 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{1/4}. \quad (3)$$

Nas proximidades de  $r_0$ , a equação (1) se resume a um potencial de confinamento parabólico centrado em  $r_0$

$$V(\rho) = \frac{1}{2}m^*\omega_0^2(\rho - r_0)^2 \quad (4)$$

onde

$$\omega_0 = \frac{8a_2}{m^*} \quad (5)$$

é a frequência característica que dá a intensidade do confinamento do anel quântico sobre uma partícula de massa efetiva  $m^*$ .

Para uma dada energia de Fermi  $\mathcal{E}_f$ , os raios externo  $r_+$  e interno  $r_-$  do anel são dados por:

$$r_{\pm} = \left( \frac{V_0 + \mathcal{E}_f \pm \sqrt{2\mathcal{E}_f V_0 + \mathcal{E}_f^2}}{2a_1} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

No limite de baixas energias ( $\mathcal{E}_f \ll V_0$ ), a espessura do anel é dada por:

$$\Delta r = \left( \frac{8\mathcal{E}_f}{m^*\omega_0} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Como podemos perceber, os parâmetros são  $a_1$  e  $a_2$  são cruciais na definição das propriedades que definem o anel quântico (mínimo de energia  $V_0$ , raio médio  $r_0$ , frequência de confinamento  $\omega_0$  e espessura  $\Delta r$ ). Isso faz do potencial de Tan-Inkson um ótimo modelo para a descrição de anéis quânticos: todas as propriedades que caracterizam o anel são obtidas através da manipulação adequada de apenas dois parâmetros.

A partir de dados experimentais retirados da seguinte referência [23], considerando um anel quântico cujo o raio médio é  $r_0 = 800 \text{ nm}$ , construído em uma estrutura de GaAs, onde a massa efetiva dos portadores de carga é  $m^* = 0,067 m_e$  (onde  $m_e$  representa a massa do elétron), e que, no fundo do potencial de confinamento,  $\hbar\omega_0 = 0,449 \text{ meV}$  obtém-se que  $a_1 = 9,1022 \cdot 10^6 \text{ meV nm}^2$  e  $a_2 = 2,222 \cdot 10^{-6} \text{ meV nm}^{-2}$ . Para esses valores

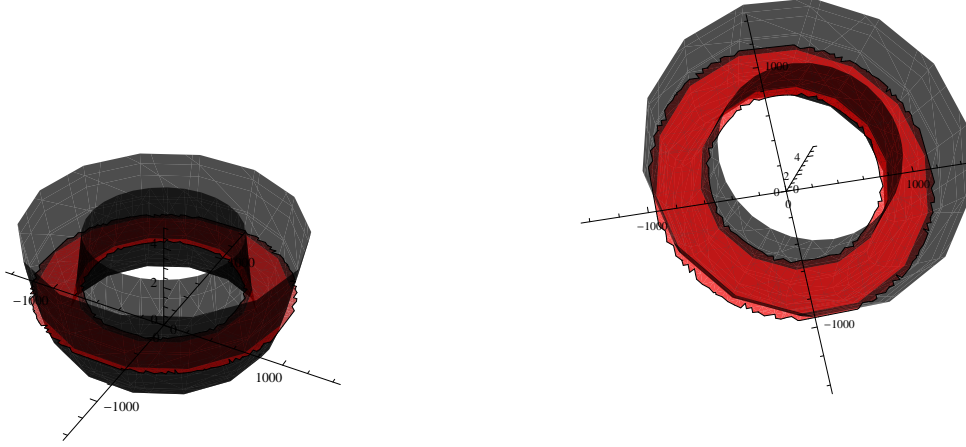


Figura 2 – Visão lateral do Potencial de Tan-Inkson.

Figura 3 – Visão do vale central do Potencial de Tan-Inkson que permite visualizar a região de confinamento anelar.

de  $a_1$  e  $a_2$ , obtemos o gráfico para o potencial de Tan-Inkson apresentado na figura (2). A figura (3) representa o mesmo gráfico que na figura (2), só que de outro ponto de vista que permite ver claramente que, para uma dada energia de Fermi, a partícula fica restrita a se mover em uma região anelar (região em vermelho). Na figura (4), apresentamos um corte do gráfico (2) referente ao plano  $z - \rho$ , para  $\rho > 0$ . Como podemos perceber, para uma energia de Fermi abaixo de  $2 \text{ eV}$ , o confinamento ao qual a partícula está sujeita é, com boa aproximação, parabólico e o mínimo do potencial encontra-se sobre  $r_0 = 800 \text{ nm}$ , o que define o raio médio do anel.

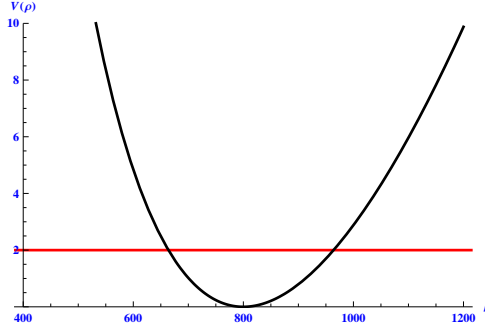


Figura 4 – Corte do Potencial de Tan-Inkson que descreve um anel quântico com  $r_0 = 800 \text{ nm}$ .

## Dinâmica de Partículas sob Efeitos Não-Inerciais

Vamos agora, partindo da descrição clássica, obter o Hamiltoniano que descreve a dinâmica quântica de partículas em referências não-inerciais que giram com uma velocidade de rotação  $\Omega$ .

A Lagrangiana que descreve o movimento de uma partícula carregada sob a influência de um campo magnético, em um referencial que gira com velocidade de rotação  $\Omega$  com relação a um referencial inercial fixo é dada por [24, 25]:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + m\mathbf{v} \cdot \Omega \times \mathbf{r} + \frac{1}{2}m(\Omega \times \mathbf{r})^2. \quad (8)$$

Através de uma transformação de Legendre, o Hamiltoniano clássico associado a equação (8) é:

$$H_\Omega = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - e\mathbf{A} - m^* \Omega \times \mathbf{r})^2 - \frac{1}{2}m^* (\Omega \times \mathbf{r})^2, \quad (9)$$

onde o termo  $\frac{1}{2}m(\Omega \times \mathbf{r})^2$  é conhecido como energia potencial centrífuga.

Embora a equação (9) tenha sido obtida classicamente, ela também é válida no domínio quântico: é só considerar que as seguintes quantidades clássicas  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{L}$  representam operadores que atuam em elementos do espaço de Hilbert.

Outra forma de se obter o Hamiltoniano (9) é considerar que a contribuição não-inercial sobre energia da partícula vem do acoplamento entre a rotação  $\Omega$  e o momento angular do sistema  $\mathbf{L}$ , isto é,

$$H_\Omega = H - \Omega \cdot \mathbf{L}, \quad (10)$$

onde  $\mathbf{L}$  é o momento angular da partícula.

Se na equação (10)  $H$  representa o Hamiltoniano para uma partícula carregada em uma região permeada por um campo magnético, então segue que

$$H_\Omega = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \Omega \cdot \mathbf{L}. \quad (11)$$

Lembrando que  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  e tendo em mente que, para o nosso caso, o vetor  $\mathbf{r}$  serve para localizar um ponto fixo sobre o anel, segue que

$$\begin{aligned} H_{\Omega} &= \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) . \end{aligned} \quad (12)$$

É necessário agora calcularmos o seguinte comutador:

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}, (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] f &= \mathbf{p} \left( (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) f \right) - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) (\mathbf{p} f) \\ &= (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) (\mathbf{p} f) + (\mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})) f - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) (\mathbf{p} f) \\ &= (\mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})) f \\ &= -i\hbar (\nabla \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})) f . \end{aligned} \quad (13)$$

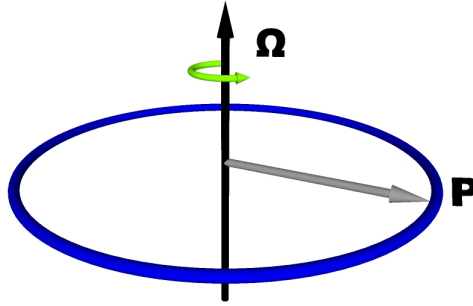


Figura 5 – Sistema não-inercial fixo no P girando com velocidade de rotação  $\Omega$  em torno do eixo  $\hat{z}$ .

Se a rotação do sistema de referência não-inercial é constante e esse sistema de referência gira em torno do eixo  $z$ , isto é,  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{z}$  e  $\mathbf{r} = (\rho_0, 0, 0)$  é um vetor que localiza um ponto fixo  $\mathbf{P}$  (ver figura (5)) segue que

$$(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \Omega \rho_0 \hat{\phi} , \quad (14)$$

o que nos permite concluir que<sup>1</sup> o comutador entre o operador momento  $\mathbf{p}$  e o termo  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  é nulo. Com essa informação, completando quadrados na equação (12), obtemos o Hamiltoniano (9) através de um simples .

## Defeitos Topológicos - Deslocação Tipo-Hélice

Do ponto de vista microscópico, a grande maioria dos sólidos se organiza em uma estrutura cristalina que apresenta um alto grau de organização de longo alcance. No

<sup>1</sup> aqui, utilizamos o divergente em coordenadas cilíndricas.



entanto, é comum a formação de defeitos na estrutura desses sólidos que, de certa forma, quebram essa simetria de longo alcance. Esses defeitos, por sua vez, influenciam diversas propriedades físicas dos sólidos cristalinos.

Existem essencialmente dois tipos de defeitos topológicos: deslocações e desclinações. Um terceiro tipo de defeito, as despirações, surge da combinação dos dois primeiros.

A classificação desses defeitos está relacionada com determinada simetria da rede cristalina. Deslocações estão relacionadas com a simetria de translação da rede, enquanto desclinações estão associadas à simetria de rotação. Outra característica de deslocações e desclinações é que elas introduzem respectivamente torção e curvatura na estrutura cristalina do sólido que as contém.

Neste trabalho, analisaremos algumas propriedades físicas de partículas carregadas e neutras confinadas por anéis quânticos sob a influência de apenas um tipo de defeito: a deslocação tipo-hélice. Uma representação esquemática desse tipo de defeito é apresentada

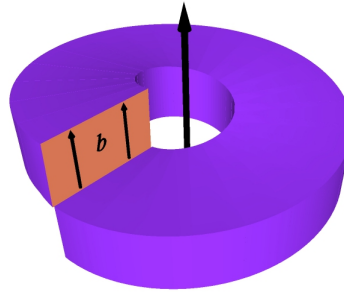


Figura 6 – Representação esquemática de uma deslocação tipo-hélice e do vetor de Burgers  $\mathbf{b}$ .

na figura (6). O vetor  $\mathbf{b}$  indicado na figura é conhecido como vetor de Burgers, que quantifica a intensidade da deslocação. No nosso caso, o vetor de Burgers é paralelo ao eixo  $z$ , indicando que a deslocação aponta nessa direção.

Uma forma de descrever como defeitos alteram certas propriedades físicas é através da Teoria Geométrica de Defeitos [26], onde deformações elásticas causadas por um defeito topológico em um meio contínuo são descritas com o auxílio de uma métrica. Desse modo, a métrica que descreve, em coordenadas cilíndricas, uma deslocação tipo-hélice é dada por:

$$ds^2 = d\rho^2 + (dz + \beta d\phi)^2 + \rho^2 d\phi^2, \quad (15)$$

onde  $\rho > 0$ ,  $0 < \phi < 2\pi$  e  $-\infty < z < \infty$ . Na métrica (15), a única componente não nula do vetor de Burges é a componente na direção  $\hat{z}$ , isto é,  $b^z = 2\pi\beta$ . O parâmetro  $\beta$  está associado com a intensidade da deslocação.

A Teoria Geométrica de Defeitos é análoga à teoria da gravitação de Einstein em três dimensões, onde um sólido cristalino é visto como um meio elástico contínuo. Esse

meio contínuo, por sua vez, é descrito por uma variedade de Riemann-Cartan, onde torção e curvatura são respectivamente associadas às deslocções e desclinações presentes no sólido cristalino.

Um grande número de autores tem se dedicado a estudar como a presença de defeitos topológicos influencia diversas propriedades físicas. Apresentamos a seguir um breve apanhado de trabalhos que tratam de nanoestruturas como pontos e anéis quânticos na presença de defeitos.

A influência de defeitos topológicos sobre a dinâmica quântica de partículas carregadas (elétrons ou buracos) em um cristal tem sido discutida em várias situações físicas [27, 28, 29]. O efeito Aharonov-Bohm, por exemplo, foi investigado em meios com desclinação [30, 31] e em meios com deslocções [29, 32, 33], sob a abordagem de Katanaev-Volovich. Kawamura [34] e Baush, Schmitz e Turski [35, 36, 37, 38] investigaram, utilizando abordagens diferentes, o espalhamento de uma única partícula em um meio deslocado e demonstraram que a equação que descreve o espalhamento da partícula pela deslocção tipo-hélice tem a forma tipo Aharonov-Bohm.

O impacto da curvatura sobre propriedades magnéticas, espectrais e de transporte em materiais nano-estruturados tem sido recentemente estudado por vários autores [39, 40, 41, 42]. Bulaev et al. [43], com auxílio do modelo de Tan-Inkson [22], estudaram o impacto da curvatura sobre a corrente persistente e a magnetização em anéis quânticos, sobre uma superfície de curvatura negativa. Na referência [44] Aurell investigou a influência de uma deslocção sobre as propriedades de pontos quânticos. Recentemente, o estudo da influência de defeitos topológicos em sistemas mesoscópicos foi realizado na ref. [45] para um ponto quântico na presença de uma desclinação e em [46] para um anel quântico sobre a influência de uma densidade de deslocções.

## Lista de Publicações

A seguir, apresentamos uma lista de trabalhos originais que fazem parte do escopo desta tese.

1. L. Dantas, A. L. Silva Netto and C. Furtado, *Quantum ring in a rotating frame in the presence of a topological defect*, Phys. Lett. A, v. **379**, n. 1-2, p. 11-15, (2015). ISSN 0375-9601. [\[47\]](#)
2. L. Dantas and C. Furtado, *Quantum particle with a permanent magnetic dipole in a rotating quantum ring* – preprint. [\[48\]](#)
3. L. Dantas and C. Furtado, *Permanent electric dipole in a rotating confining potential* – preprint. [\[49\]](#)
4. L. Dantas and C. Furtado, *Quantum particle with an induced electric dipole in a rotating quantum ring* – preprint. [\[50\]](#)



# 1 Efeitos Não-Inerciais em Partículas Carregadas

Neste capítulo, iremos estudar como efeitos não-inerciais causados pela presença de rotação do sistema de referência influenciam a dinâmica quântica de uma partícula dotada de carga elétrica (elétron ou buraco) confinada por um anel quântico. Além da rotação, também investigaremos como a presença de um defeito topológico pode alterar as propriedades físicas do nosso sistema. Os resultados apresentados neste capítulo são inéditos e foram publicados como se pode conferir na seguinte referência [47].

## 1.1 Introdução

Na mecânica clássica, o movimento das partículas é descrito pela ação de forças. A segunda lei de Newton nos diz como partículas se movem pelo espaço sob a influência de uma força resultante. Se a partícula é carregada, sua interação com campos elétricos e magnéticos é dada pela força de Lorentz.

Campos elétricos e magnéticos, por sua vez, são descritos pelas equações de Maxwell. A descrição de fenômenos eletromagnéticos pode ser simplificada pela introdução de potenciais eletromagnéticos (o potencial escalar  $\phi$  e o potencial vetor  $\mathbf{A}$ ), pois são necessárias apenas quatro componentes (uma do potencial escalar e três do potencial vetor), em vez de seis (três para o campo elétrico e três para o campo magnético).

Por muito tempo, pensou-se que os potenciais eletromagnéticos fossem apenas meros artifícios matemáticos com o único propósito de facilitar os cálculos envolvidos na obtenção dos campos eletromagnéticos. Com o advento da mecânica quântica, esse paradigma mudou. A equação de Schrödinger não contém campos, apenas potenciais. Isso levantou a problemática de qual descrição da interação eletromagnética (através de campos ou potenciais) seria mais fundamental.

Em 1959, Aharonov e Bohm [8] propuseram dois experimentos (um envolvendo o potencial escalar e outro envolvendo o potencial vetor) para resolver esse paradigma. A ideia consiste em analisar a dinâmica quântica de uma partícula em uma região livre da influência de campos eletromagnéticos – apenas a contribuição dos potenciais eletromagnéticos é diferente de zero.

O efeito Aharonov-Bohm magnético (o mais conhecido dos dois) descreve como uma partícula carregada é afetada pelo potencial vetor associado a um solenoide muito longo: a partícula adquire uma fase quântica em sua função de onda que é proporcional

ao fluxo magnético dentro do solenoide. Com isso, podemos concluir que, no domínio da mecânica quântica, potenciais eletromagnéticos têm um significado físico não usual e mais fundamental do que os próprios campos – partículas carregadas são afetadas por esses potenciais, mesmo estando em regiões livres de campos elétricos e magnéticos clássicos.

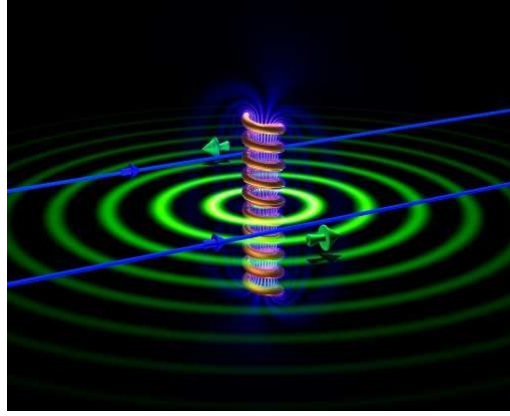


Figura 7 – Ilustração do campo magnético e potencial vetor para o solenoide. Figura extraída da referência [2].

Na figura (7) temos uma representação esquemática do campo magnético (azul) e do potencial vetor (círculos verdes). Como podemos notar, a grande maioria das linhas de

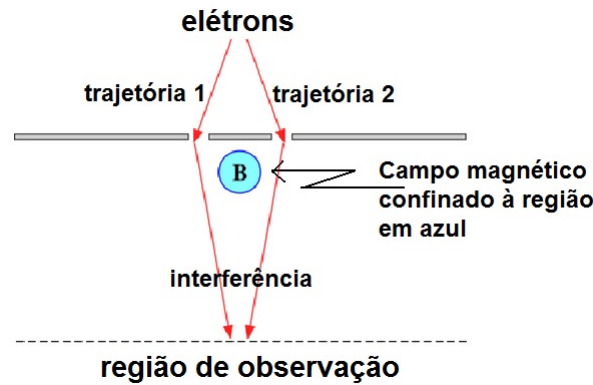


Figura 8 – Representação esquemática para observação do efeito Aharonov-Bohm.

campo magnético estão confinadas dentro do solenoide, apenas uma pequena parcela atinge a região onde a partícula passa (trajetória descrita pelas setas em azul). No caso limite de um solenoide infinito, obtém-se a condição ideal de que todas as linhas de campo magnético encontram-se confinadas dentro do solenoide, garantindo que a partícula descreva seu movimento em uma região livre de campos. Em contrapartida, percebe-se claramente que o potencial vetor é diferente de zero nessa região. Na figura (8) temos um esquema de como se observar o efeito Aharonov-Bohm. Um feixe de elétrons coerentes é dividido nas trajetórias 1 e 2, passam nas proximidades do campo magnético confinado à região azul. Em seguida, os dois feixes são recombinados na região de observação a fim de se observar se houve

uma mudança de fase. O que se observa experimentalmente é uma figura apresentando franjas de interferência [ver figura (9)]. À medida que se varia o fluxo magnético dentro

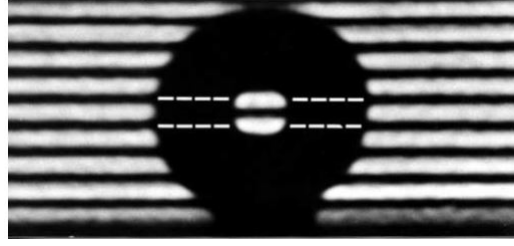


Figura 9 – Padrão de interferência observado no experimento realizado por Tonomura [3]. Figura extraída da referência [2].

do solenóide, observa-se o deslocamento vertical das franjas de interferência formadas na região de observação.

A primeira constatação experimental do efeito Aharonov-Bohm é atribuída a um trabalho de 1960, publicado por Chambers [51]. No entanto, os resultados apresentados por Chambers foram posteriormente questionados porque havia a possibilidade de que os elétrons não estivessem completamente protegidos da ação dos campos magnéticos – principal exigência do que foi proposto por Aharonov e Bohm. Com um aparato experimental completamente diferente, Tonomura et al. [3] demonstram a existência do efeito Aharonov-Bohm utilizando um ímã toroidal revestido com um filme supercondutor que garante que os elétrons estejam blindados da ação do campo magnético. Na figura (9) podemos observar o padrão de interferência obtido por Tonomura.

A equação de Schrödinger para uma partícula carregada na presença de campos elétricos e magnéticos é dada por

$$\left[ \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi(\rho) \right] \Psi = \mathcal{E}\Psi, \quad (1.1)$$

onde

$$\Psi = e^{ig(\rho)} \Psi' \quad (1.2)$$

é a solução da equação (1.1),

$$g(\rho) \equiv \frac{e}{\hbar} \int_0^x \mathbf{A}(\rho) \cdot d\ell \quad (1.3)$$

é um fator de fase e  $\Psi'$  é a solução para a equação de Schrödinger na ausência do potencial vetor  $\mathbf{A}$ .

A diferença de fase acumulada na função de onda da partícula é calculada levando em conta as trajetórias 1 e 2 na figura (8) assim:

$$\Delta g = g_1 - g_2 = \frac{e}{\hbar} \left( \int_{C_1} \mathbf{A}(\rho) \cdot d\boldsymbol{\rho} - \int_{C_2} \mathbf{A}(\rho) \cdot d\ell \right) = \frac{e}{\hbar} \oint_C \mathbf{A}(\rho) \cdot d\ell. \quad (1.4)$$

Usando o teorema de Stokes e lembrando que

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.5)$$

temos que

$$\Delta g = \frac{e}{\hbar} \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\hbar} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{\hbar} \Phi_m, \quad (1.6)$$

onde  $\Phi_m$  é o fluxo magnético dentro confinado dentro do solenóide. Então, se houver alguma mudança no campo magnético dentro do solenóide, é observado uma mudança de fase entre os dois feixes, refletindo na mudança do padrão de interferência.

Outro efeito muito importante que envolve a dinâmica quântica de uma partícula carregada em uma região permeada por um campo magnético é a quantização de Landau, que nos permite explicar como certas propriedades de sistemas eletrônicos oscilam em função do campo magnético aplicado. A principal característica da quantização de Landau é que os níveis de energia fundem-se em um espectro de energia discreto, semelhante ao de uma partícula confinada em um oscilador harmônico, com cada nível sendo infinitamente degenerado. Conforme mostrado nas referências [52] e [53], os níveis de energia de uma partícula em um campo magnético uniforme são dados pela seguinte expressão:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}, \quad (1.7)$$

onde

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*} \quad (1.8)$$

é a frequência ciclotron caracterísca do movimento da partícula no campo magnético uniforme.

O primeiro termo da equação anterior dá os valores discretos de energia correspondente ao movimento da partícula num plano perpendicular ao campo, enquanto o segundo termo está associado com o movimento da partícula na direção  $\hat{z}$ . O conjunto dos níveis de energia rotulados pelo número quântico  $n$  define o que chamamos de níveis de Landau. Cada nível de Landau é dito infinitamente degenerado, pois o espectro de energia (1.7) não depende do número quântico azimutal  $m$  e como a única condição imposta sobre  $m$  é que ele seja um número inteiro, então para cada valor de  $n$  haverá infinitos estados possíveis (infinitas possibilidades para  $m$ ) com a mesma energia.

## 1.2 Partículas Carregadas em Anéis Quânticos sob Rotação

Nesta seção, estudaremos a dinâmica quântica de uma partícula carregada confinada pelo potencial de um anel quântico girante.

O Hamiltoniano que descreve a dinâmica quântica de um elétron ou buraco, com carga e massa respectivamente iguais a  $e$  e  $m^*$ , que interage com um campo magnético



externo e está confinado pelo potencial de um anel quântico é dado por

$$H = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + V(\rho), \quad (1.9)$$

onde  $V(\rho)$  é o potencial de confinamento de um anel quântico, conhecido como potencial de Tan-Inkson, que é dado por

$$V(\rho) = \frac{a_1}{\rho^2} + a_2\rho^2 - V_0, \quad (1.10)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são parâmetros constantes e  $V_0 = 2\sqrt{a_1 a_2}$ .

A configuração do campo magnético externo que utilizaremos é composta por duas contribuições: um campo magnético uniforme paralelo ao eixo  $\hat{z}$  e um fluxo tipo Aharonov-Bohm confinado ao centro do anel, também paralelo ao eixo  $\hat{z}$ . Tal configuração é descrita por

$$\mathbf{B} = [B + \Phi\delta^2(\rho)] \hat{z} \quad (1.11)$$

onde  $\delta^2(\rho)$  é a função delta de Dirac em duas dimensões e  $\Phi = \ell \Phi_0$  ( $\Phi_0 = h/e$ ) é o fluxo de campo magnético confinado no centro do anel e  $\ell$  é um número inteiro. Essa configuração de campo magnético é gerada pelo seguinte potencial vetor

$$\mathbf{A} = \left( \frac{B}{2}\rho + \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{\rho} \right) \hat{\phi}. \quad (1.12)$$

Vamos agora introduzir a contribuição da rotação para a dinâmica quântica da partícula. O Hamiltoniano  $H$  dado na equação (1.9) é definido em um sistema de referência inercial. Definiremos agora um Hamiltoniano  $H_\Omega$  em um sistema de referência que gira com velocidade angular constante  $\boldsymbol{\Omega}$  em torno de um eixo fixo. Esses dois Hamiltonianos se relacionam da seguinte forma [25]:

$$H_\Omega = H - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L}, \quad (1.13)$$

onde  $\mathbf{L}$  é o momento angular da partícula.

Substituindo a equação (1.9) na equação (1.13), temos que

$$H_\Omega = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L} + V(\rho). \quad (1.14)$$

Lembrando que  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  e tendo em mente que, para o nosso caso, o vetor  $\mathbf{r}$  serve para localizar um ponto fixo sobre o anel, segue que

$$\begin{aligned} H_\Omega &= \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + V(\rho) \\ &= \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + V(\rho). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Pelo fato de considerarmos uma rotação  $\boldsymbol{\Omega}$  constante, podemos reescrever a equação anterior de uma forma mais conveniente:

$$H_{\Omega} = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - e\mathbf{A} - m^* \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - \frac{1}{2} m^* (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 + V(\rho). \quad (1.16)$$

Como podemos notar, o termo cinético do Hamiltoniano (1.16) possui, além do acoplamento mínimo com o potencial vetor usual, um termo extra associado com a rotação do sistema de referência. Essa termo extra sugere que a força de Coriolis presente no sistema de referência não-inercial faz um papel análogo ao da força de Lorentz que atua sobre uma partícula carregada em um campo magnético uniforme. Com isso em mente, é válido pensar que o termo  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  dentro do termo cinético se comporta como um acoplamento mínimo e pode ser entendido como um potencial vetor efetivo associado ao efeito não-inercial de rotação, isto é,

$$\mathbf{A}_{\Omega} \equiv \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (1.17)$$

Considerando um ponto fixo sobre o anel localizado pelo vetor  $\mathbf{r} = (\rho, 0, 0)$  e que esse ponto descreve uma rotação  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{z}$  em torno do eixo  $\hat{z}$ , o potencial vetor efetivo  $\mathbf{A}_{\Omega}$  associado ao efeito não-inercial de rotação fica assim:

$$\mathbf{A}_{\Omega} = \Omega \rho \hat{\phi}. \quad (1.18)$$

A equação (1.16) é, portanto, o Hamiltoniano que descreve a dinâmica quântica de uma partícula carregada, confinada em um anel quântico girante. Iremos agora proceder com a resolução da equação de Schrödinger associada a esse Hamiltoniano em duas situações distintas: primeiramente, obteremos os autovalores de energia e as autofunções considerando um espaço-tempo plano e logo em seguida, a equação de Schrödinger será resolvida no background de uma deslocação tipo-hélice.

### 1.2.1 Anel Quântico sob Rotação em um Espaço Plano

Nesta seção, estudaremos, via resolução da equação de Schrödinger, a dinâmica quântica não-relativística de uma partícula carregada confinada por um anel quântico girante, considerando um espaço-tempo plano.

Pelo fato de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}_{\Omega}$  apresentarem uma contribuição não nula apenas na direção azimutal, segue que o Hamiltoniano (1.16) escrito em coordenadas cilíndricas, num espaço-tempo plano fica assim:

$$\begin{aligned} H_{\Omega} = & -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right) - \frac{ie}{\hbar} A_{\phi} - \frac{im^*}{\hbar} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})_{\phi} \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \\ & - \frac{1}{2} m^* (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 + V(\rho). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Agora, iremos proceder com a resolução da equação de Schrödinger associada ao Hamiltoniano (1.19). Substituindo as contribuições do campo magnético (1.12), da rotação (1.18) e do potencial de Tan-Inkson (1.10) na equação (1.19), tal Hamiltoniano assume a seguinte forma

$$H_{\Omega} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{ie}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \right) - \frac{ie}{2\hbar} \left( B + \frac{2m^*}{e} \Omega \right) \rho \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} m^* \Omega^2 \rho^2 + \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0. \quad (1.20)$$

A equação de Schrödinger independente do tempo associada ao Hamiltoniano (1.20) é dada por

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{ie}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \right)^2 - \left( \frac{e}{2\hbar} \right)^2 \left( B^2 + \frac{4m^* B}{e} \Omega \right) \rho^2 - \right. \\ & - \left. \left( \frac{ie}{\hbar} \right) \left( B + \frac{2m^*}{e} \Omega \right) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{ie}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi + \\ & + \left[ \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0 \right] \Psi = \mathcal{E} \Psi. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Depois de algumas manipulações matemáticas, temos que

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{ie}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \right)^2 - \frac{2m^* a_1}{\hbar^2} \right] - \left[ \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2} + \frac{4m^* \Omega e B}{4\hbar^2} + \frac{2m^* a_2}{\hbar^2} \right] \rho^2 - \right. \\ & - \left. \left( \frac{ie}{\hbar} \right) \left( B + \frac{2m^*}{e} \Omega \right) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{ie}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2m^*}{\hbar^2} (V_0 + \mathcal{E}) \right] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Lembrando que  $\Phi = \ell \hbar / e$  a equação anterior fica assim:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i\ell \right)^2 - \frac{2m^* a_1}{\hbar^2} \right] - \left[ \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2} + \frac{4m^* \Omega e B}{4\hbar^2} + \frac{2m^* a_2}{\hbar^2} \right] \rho^2 - \right. \\ & - \left. \left( \frac{ie}{\hbar} \right) \left( B + \frac{2m^*}{e} \Omega \right) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i\ell \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2m^*}{\hbar^2} (V_0 + \mathcal{E}) \right] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Devido a simetria do problema, utilizamos o seguinte anzats

$$\Psi = A R(\rho) e^{im\phi} e^{ikz}, \quad (1.24)$$

onde  $A$  é a constante de normalização. Depois de algumas transformações, obtemos a seguinte equação radial

$$\begin{aligned} & R'' + \frac{1}{\rho} R' - \frac{1}{\rho^2} \left[ (m - \ell)^2 + \frac{2m^* a_1}{\hbar^2} \right] R - \left[ \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2} + \frac{4m^* \Omega e B}{4\hbar^2} + \frac{2m^* a_2}{\hbar^2} \right] \rho^2 R + \\ & + \left[ \left( \frac{e}{\hbar} \right) \left( B + \frac{2m^*}{e} \Omega \right) (m - \ell) - k^2 + \frac{2m^*}{\hbar^2} (V_0 + \mathcal{E}) \right] R = 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Introduzindo as seguintes definições

$$\begin{aligned}
\omega_c^2 &= \left( \frac{eB}{m^*} \right)^2; \\
\omega_0^2 &= \frac{8a_2}{m^*}; \\
\omega^2 &= \omega_c^2 + 4\Omega\omega_c + \omega_0^2; \\
L^2 &= (m - \ell)^2 + \frac{2m^*a_1}{\hbar^2}; \\
\gamma' &= 2m^* \frac{V_0 + \mathcal{E}}{\hbar^2} + \frac{m^*\omega^*}{\hbar} (m - \ell) - k^2; \\
\omega^* &= \omega_c + 2\Omega,
\end{aligned} \tag{1.26}$$

a equação radial (1.25) assume uma forma bem conhecida:

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' + \left[ -\frac{m^{*2}\omega^2}{4\hbar^2}\rho^2 + \gamma' - \frac{L^2}{\rho^2} \right] R = 0. \tag{1.27}$$

É importante notar que a frequência cíclotron  $\omega_c$  fará o papel da frequência de Landau  $\omega$  caso a partícula esteja livre do confinamento do anel e na ausência de rotação, isto é, sempre que as condições  $a_1 \rightarrow 0$ ,  $a_2 \rightarrow 0$  e  $\Omega \rightarrow 0$  forem satisfeitas.

Procedendo com a seguinte mudança de variáveis

$$\xi = \frac{m^*\omega}{2\hbar}\rho^2 \tag{1.28}$$

podemos reescrever a equação (1.27) assim:

$$\xi\ddot{R} + \dot{R} + \left[ -\frac{\xi}{4} + \gamma - \frac{L^2}{4\xi} \right] R = 0, \tag{1.29}$$

onde

$$\gamma = \frac{\hbar}{2m^*\omega} \left[ 2m^* \frac{V_0 + \mathcal{E}}{\hbar^2} + \frac{m^*\omega^*}{\hbar} (m - \ell) - k^2 \right]. \tag{1.30}$$

Analizando o comportamento da equação (1.29) nos limites assintóticos, isto é, para  $\xi \rightarrow 0$  and para  $\xi \rightarrow \infty$  [conf. (A.1)], podemos escrever uma solução para a equação (1.54) na seguinte forma:

$$R(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{|L|/2} \zeta(\xi). \tag{1.31}$$

Substituindo então a equação (1.31) na equação (1.29), verifica-se facilmente que a função  $\zeta(\xi)$  obedece à seguinte equação diferencial:

$$\xi\ddot{\zeta} + (|L| + 1 - \xi)\dot{\zeta} - \left[ \frac{|L| + 1}{2} - \gamma \right] \zeta = 0, \tag{1.32}$$

onde (1.32) é a equação hipergeométrica, cuja solução é a função hipergeométrica confluyente:

$$\zeta(\xi) = F \left[ - \left( \gamma - \frac{|L| + 1}{2} \right); |L| + 1; \xi \right]. \tag{1.33}$$

A quantização da energia vem do fato de que a função hipergeométrica deve obedecer a uma condição de convergência, condição esta que é satisfeita quando o primeiro parâmetro da função hipergeométrica (1.33) for igual a um número inteiro negativo, isto é:

$$-\left(\gamma - \frac{|L| + 1}{2}\right) = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.34)$$

Substituindo a equação (1.30) na equação (1.34), segue que

$$-\left(\frac{\hbar}{2m^*\omega} \left[2m^*\frac{V_0 + \mathcal{E}}{\hbar^2} + \frac{m^*\omega^*}{\hbar}(m - \ell) - k^2\right] - \frac{|L| + 1}{2}\right) = -n. \quad (1.35)$$

A partir daí, facilmente obtemos o seguinte espectro de energia:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left(n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega - \frac{1}{2}(m - \ell) \hbar\omega^* - \frac{m^*}{4}\omega_0^2 r_0^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}. \quad (1.36)$$

Os números quânticos  $n$ ,  $m$  e  $k$  caracterizam respectivamente o movimento da partícula na direção radial, o momento angular e o movimento da partícula na direção  $z$ . Devido a condição de quantização imposta pela função hipergeométrica, o número quântico  $n$  deve ser um número inteiro maior ou igual a zero. Como a função de onda apresenta condição de contorno periódica na direção azimutal, o número quântico  $m$  pode assumir qualquer valor inteiro. Por fim, o número quântico  $k$  pode assumir qualquer valor de  $-\infty$  a  $+\infty$ , pelo fato de o movimento da partícula não ser quantizado nessa direção.

Vemos claramente na equação (1.36) que a única contribuição do fluxo Aharonov-Bohm sobre os autovalores de energia é de alterar o número quântico  $m$  para  $(m - \ell)$ . Além disso, os níveis de energia são caracterizados por três frequências:  $\omega$ ,  $\omega^*$  e  $\omega_0$ . A primeira é a frequência de Landau  $\omega$  que depende do campo magnético, do coeficiente  $a_2$  do potencial de Tan-Inkson e também da velocidade angular  $\Omega$ . A segunda frequência  $\omega^*$  depende tanto da frequência ciclotron  $\omega_c$  quanto da rotação  $\Omega$ . Finalmente, a terceira frequência  $\omega_0$  é a frequência característica do potencial de confinamento de Tan-Inkson que, por sua vez, depende apenas do parâmetro  $a_2$ .

Se considerarmos o limite no qual o sistema de referência não gira ( $\Omega = 0$ ) e o confinamento proveniente do potencial de Tan é desconsiderado ( $a_1 = a_2 = 0$ ), a equação (1.36) assume uma forma mais simples:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}, \quad (m \geq \ell), \quad (1.37)$$

isto é, recuperamos os níveis de Landau usuais (1.7).

Porém, se todas as condições necessárias para a obtenção da equação (1.36) forem satisfeitas, o comportamento da degenerescência muda: diferente dos níveis de Landau, o nosso sistema só é degenerado com respeito ao número quântico  $m$  quando  $a_1 = a_2 = 0$ .

Vamos agora obter as autofunções de energia. Substituindo a equação (1.33) na (1.31) e voltando para a variável  $\rho$ , temos que

$$R(\rho) = \left(\frac{1}{2^{|L|}}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho}{\lambda_0}\right)^{|L|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2}\right) F\left[-n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2}\right]. \quad (1.38)$$

Reunindo agora as equações (1.24) e (1.38), a função de onda não normalizada para o nosso problema fica assim:

$$\Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = A \left(\frac{1}{2^{|L|}}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho}{\lambda_0}\right)^{|L|} e^{im\phi} e^{ikz} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2}\right) F\left[-n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2}\right]. \quad (1.39)$$

Da equação (22) temos que

$$A = \frac{1}{\lambda_0} \left[ \frac{(n + |\ell|)!}{2n! [\Gamma(|\ell| + 1)\pi]^2} \right]^{1/2}, \quad (1.40)$$

o que, finalmente, nos leva às seguintes autofunções normalizadas:

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = & \frac{1}{\lambda_0^{|L|+1}} \left[ \frac{\Gamma(n + |L| + 1)}{2^{|L|+1} n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2} \\ & \cdot e^{im\phi} e^{ikz} \rho^{|L|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2}\right) F\left[-n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2}\right], \end{aligned} \quad (1.41)$$

onde

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m^*\omega}} \quad (1.42)$$

é o comprimento magnético renormalizado pelo confinamento do anel quântico e pelo efeito não-inercial. O comprimento magnético  $\lambda_0$  representa a amplitude de oscilação e também serve como um fator de escala, dando as dimensões típicas do sistema.

### 1.2.2 Anel Quântico sob Rotação no Espaço de uma Deslocação Tipo-Hélice

Nesta seção, estudaremos a dinâmica quântica de uma partícula carregada confinada por um anel quântico girante. Além da rotação do sistema de referência, a partícula encontra-se na presença de uma deslocação tipo-hélice.

Precisamos agora introduzir a contribuição da geometria, escrevendo a equação (1.16) no background de uma deslocação tipo-hélice. A forma como distâncias são medidas em um espaço com uma deslocação tipo-hélice ao considerar a seguinte métrica tridimensional:

$$ds^2 = d\rho^2 + (dz + \beta d\phi)^2 + \rho^2 d\phi^2, \quad (1.43)$$

onde  $\rho > 0$ ,  $0 < \phi < 2\pi$  e  $-\infty < z < \infty$ . Na métrica (1.43), a única componente não nula do vetor de Burges é a componente na direção  $\hat{z}$ , isto é,  $b^z = 2\pi\beta$ .

Para investigar quais são as contribuições desse defeito nas as propriedades de uma partícula carregada confinada em um anel quântico sob rotação, precisamos escrever o Hamiltoniano (1.16) no background da métrica (1.43). Pelo fato de  $\mathbf{A}$  e  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  apresentarem uma contribuição não nula apenas na direção azimutal, segue que

$$H_{\Omega} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{ie}{\hbar} A_{\phi} - \frac{im^*}{\hbar} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})_{\phi} \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} m^* (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 + V(\rho). \quad (1.44)$$

Agora iremos proceder com a resolução da equação de Schrödinger associada ao Hamiltoniano (1.44). Substituindo as contribuições do campo magnético (1.12), da rotação (1.18) e do potencial de Tan-Inkson (1.10) na equação (1.44), tal Hamiltoniano assume a seguinte forma

$$H_{\Omega} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - \frac{ie}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \right) - \frac{ie}{2\hbar} \left( B + \frac{2m^*}{e} \Omega \right) \rho \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} m^* \Omega^2 \rho^2 + \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0. \quad (1.45)$$

A equação de Schrödinger independente do tempo associada ao Hamiltoniano (1.45) é dada por

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - \frac{ie}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \right)^2 - \left( \frac{e}{2\hbar} \right)^2 \left( B^2 + \frac{4m^* B}{e} \Omega \right) \rho^2 - \right. \\ & - \left. \left( \frac{ie}{\hbar} \right) \left( B + \frac{2m^*}{e} \Omega \right) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - \frac{ie}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi + \\ & + \left[ \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0 \right] \Psi = \mathcal{E} \Psi. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Depois de algumas manipulações matemáticas, temos que

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - \frac{ie}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \right)^2 - \frac{2m^* a_1}{\hbar^2} \right] - \left[ \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2} + \frac{4m^* \Omega e B}{4\hbar^2} + \frac{2m^* a_2}{\hbar^2} \right] \rho^2 - \right. \\ & - \left. \left( \frac{ie}{\hbar} \right) \left( B + \frac{2m^*}{e} \Omega \right) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - \frac{ie}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2m^*}{\hbar^2} (V_0 + \mathcal{E}) \right] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Lembrando que  $\Phi = \ell h/e$  a equação anterior fica assim:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i\ell \right)^2 - \frac{2m^* a_1}{\hbar^2} \right] - \left[ \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2} + \frac{4m^* \Omega e B}{4\hbar^2} + \frac{2m^* a_2}{\hbar^2} \right] \rho^2 - \right. \\ & - \left. \left( \frac{ie}{\hbar} \right) \left( B + \frac{2m^*}{e} \Omega \right) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i\ell \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2m^*}{\hbar^2} (V_0 + \mathcal{E}) \right] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Devido a simetria do problema, utilizamos o seguinte anzats

$$\Psi = A R(\rho) e^{im\phi} e^{ikz} \quad (1.49)$$

onde  $A$  é a constante de normalização. Depois de algumas transformações, obtemos a seguinte equação radial

$$\begin{aligned} R'' + \frac{1}{\rho} R' - \frac{1}{\rho^2} \left[ (m - \beta k - \ell)^2 + \frac{2m^* a_1}{\hbar^2} \right] R - \left[ \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2} + \frac{4m^* \Omega e B}{4\hbar^2} + \frac{2m^* a_2}{\hbar^2} \right] \rho^2 R + \\ + \left[ \left( \frac{e}{\hbar} \right) \left( B + \frac{2m^*}{e} \Omega \right) (m - \beta k - \ell) - k^2 + \frac{2m^*}{\hbar^2} (V_0 + \mathcal{E}) \right] R = 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Introduzindo as seguintes definições

$$\begin{aligned} \omega_c^2 &= \left( \frac{eB}{m^*} \right)^2; \\ \omega_0^2 &= \frac{8a_2}{m^*}; \\ \omega^2 &= \omega_c^2 + 4\Omega\omega_c + \omega_0^2; \\ L^2 &= (m - \beta k - \ell)^2 + \frac{2m^* a_1}{\hbar^2}; \\ \gamma' &= 2m^* \frac{V_0 + \mathcal{E}}{\hbar^2} + \frac{m^* \omega^*}{\hbar} (m - \beta k - \ell) - k^2; \\ \omega^* &= \omega_c + 2\Omega, \end{aligned} \quad (1.51)$$

a equação radial (1.50) assume uma forma bem conhecida:

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left[ -\frac{m^{*2} \omega^2}{4\hbar^2} \rho^2 + \gamma' - \frac{L^2}{\rho^2} \right] R = 0. \quad (1.52)$$

Procedendo com a seguinte mudança de variáveis

$$\xi = \frac{m^* \omega}{2\hbar} \rho^2 \quad (1.53)$$

podemos reescrever a equação (1.52) assim:

$$\xi \ddot{R} + \dot{R} + \left[ -\frac{\xi}{4} + \gamma - \frac{L^2}{4\xi} \right] R = 0, \quad (1.54)$$

onde

$$\gamma = \frac{\hbar}{2m^* \omega} \left[ 2m^* \frac{V_0 + \mathcal{E}}{\hbar^2} + \frac{m^* \omega^*}{\hbar} (m - \beta k - \ell) - k^2 \right]. \quad (1.55)$$

Analizando o comportamento da equação (1.54) nos limites assintóticos, isto é, para  $\xi \rightarrow 0$  and para  $\xi \rightarrow \infty$  [conf. (A.1)], podemos escrever uma solução para a equação (1.54) na seguinte forma:

$$R(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{|L|/2} \zeta(\xi), \quad (1.56)$$

Substituindo então a equação (1.56) na equação (1.54), verifica-se facilmente que a função  $\zeta(\xi)$  obedece à seguinte equação diferencial:

$$\xi \ddot{\zeta} + (|L| + 1 - \xi) \dot{\zeta} - \left[ \frac{|L| + 1}{2} - \gamma \right] \zeta = 0, \quad (1.57)$$



onde (1.57) é a equação hipergeométrica, cuja solução é a função hipergeométrica confluyente:

$$\zeta(\xi) = F \left[ - \left( \gamma - \frac{|L|+1}{2} \right); |L|+1; \xi \right]. \quad (1.58)$$

A quantização da energia vem do fato de que a função hipergeométrica deve obedecer a uma condição de convergência, condição esta que é satisfeita quando o primeiro parâmetro da função hipergeométrica (1.58) for igual a um número inteiro negativo, isto é:

$$- \left( \gamma - \frac{|L|+1}{2} \right) = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.59)$$

Substituindo a equação (1.55) na equação (1.59), segue que

$$- \left( \frac{\hbar}{2m^*\omega} \left[ 2m^* \frac{V_0 + \mathcal{E}}{\hbar^2} + \frac{m^*\omega^*}{\hbar} (m - \beta k - \ell) - k^2 \right] - \frac{|L|+1}{2} \right) = -n \quad (1.60)$$

A partir daí, facilmente obtemos o seguinte espectro de energia:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega - \frac{1}{2} (m - \beta k - \ell) \hbar\omega^* - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}. \quad (1.61)$$

Os números quânticos  $n$ ,  $m$  e  $k$  caracterizam respectivamente o movimento da partícula na direção radial, o momento angular e o movimento da partícula na direção  $z$ . Devido a condição de quantização imposta pela função hipergeométrica, o número quântico  $n$  deve ser um número inteiro maior ou igual a zero. Como a função de onda apresenta condição de contorno periódica na direção azimutal, o número quântico  $m$  pode assumir qualquer valor inteiro. Por fim, o número quântico  $k$  pode assumir qualquer valor de  $-\infty$  a  $+\infty$ , pelo fato de o movimento da partícula não ser quantizado nessa direção.

Comparando as equações (1.36) e (1.61), vemos claramente que a única contribuição da presença do defeito topológico sobre os autovalores de energia é de, assim como o fluxo Aharonov-Bohm, alterar o número quântico  $m$  para  $(m - \beta k - \ell)$ . É fácil perceber que podemos obter o espectro de energia para o caso do espaço-tempo plano (1.36) a partir do espectro de energia obtido no background da deslocação tipo-hélice (1.61). Basta tomar  $\beta = 0$ . Além disso, os níveis de energia dados na equação (1.61) para a partícula carregada confinada em um anel quântico girante, na presença de uma deslocação tipo-hélice são caracterizados pelas mesmas três frequências  $\omega$ ,  $\omega^*$  e  $\omega_0$  que caracterizam o caso sem defeito descrito na equação (1.36).

Considerando o limite para o qual não temos o campo magnético, isto é,  $B = 0$ , a equação (1.61) fica assim:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_0 - (m - \beta k - \ell) \hbar\Omega - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}. \quad (1.62)$$

Podemos ver na expressão (1.62) que os autovalores de energia, mesmo na ausência de campo magnético, apresentam a mesma forma da expressão obtida por Tan e Inkson em [22] para um anel quântico. Note que a velocidade angular  $\Omega$  faz o papel da frequência cíclotron. Dessa forma, fica evidente que o efeito não-inercial causado pela rotação do sistema de referência induz na dinâmica quântica das partículas efeitos típicos de campos magnéticos. Em resumo, podemos entender que a rotação se comporta como um campo magnético efetivo.

Vamos agora obter as autofunções de energia. Substituindo a equação (1.58) na (1.56) e voltando para a variável  $\rho$ , temos que

$$R(\rho) = \left(\frac{1}{2^{|L|}}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho}{\lambda_0}\right)^{|L|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2}\right) F\left[-n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2}\right]. \quad (1.63)$$

Reunindo agora as equações (1.49) e (1.63), a função de onda não normalizada para o nosso problema fica assim:

$$\Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = A \left(\frac{1}{2^{|L|}}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho}{\lambda_0}\right)^{|L|} e^{im\phi} e^{ikz} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2}\right) F\left[-n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2}\right]. \quad (1.64)$$

Da equação (22) temos que

$$A = \frac{1}{\lambda_0} \left[ \frac{(n + |\ell|)!}{2n! [\Gamma(|L| + 1)\pi]^2} \right]^{1/2}, \quad (1.65)$$

o que, finalmente, nos leva às seguintes autofunções normalizadas:

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = & \frac{1}{\lambda_0^{|L|+1}} \left[ \frac{\Gamma(n + |L| + 1)}{2^{|L|+1} n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2} \\ & \cdot e^{im\phi} e^{ikz} \rho^{|L|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2}\right) F\left[-n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2}\right], \end{aligned} \quad (1.66)$$

onde

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m^* \omega}} \quad (1.67)$$

é o comprimento magnético renormalizado pelo confinamento do anel quântico e pelo efeito não-inercial. O comprimento magnético  $\lambda_0$  representa a amplitude de oscilação e também serve como um fator de escala, dando as dimensões típicas do sistema.

### 1.2.3 Corrente Persistente

De acordo com a lei de Ohm, para que uma corrente elétrica percorra dois pontos de um dado condutor, é necessária a existência de uma diferença de potencial entre esses dois pontos. Em contrapartida, em certos sistemas quânticos é possível se observar uma corrente elétrica constante que não é impulsionada por nenhuma fonte de energia externa. Isso é o que chamamos de corrente persistente.

Uma maneira de se obter a corrente carregada por um dado estado eletrônico  $\Psi_{n,m,k}$  é através da seguinte equação:

$$I_{n,m,k} = \int dz \int d\phi \int dr j_{n,m,k}(r, \phi, z), \quad (1.68)$$

onde  $j_{n,m,k}(r, \phi, z)$  é a densidade de corrente para esse estado quântico.

No entanto, já que conhecemos a expressão analítica para o espectro de energia, é mais conveniente calcular  $I_{n,m,k}$  usando a relação Byers-Yang [54]:

$$\begin{aligned} I_{n,m,k} &= -\frac{\partial \mathcal{E}_{n,m,k}}{\partial \Phi_{AB}} \\ &\Downarrow \\ I_{n,m,k} &= -\frac{1}{\phi_0} \frac{\partial \mathcal{E}_{n,m,k}}{\partial \ell}, \end{aligned} \quad (1.69)$$

lembrando que  $\phi_0 = h/e$  e  $\ell$  é um número inteiro que conta quantos quanta de fluxo magnético estão confinados no centro do anel.

A corrente persistente total é, portanto, a soma das correntes carregadas por todos estados eletrônicos ocupados:

$$I = \sum_{n,m,k} I_{n,m,k}, \quad (1.70)$$

onde devemos ter em mente que a soma em  $k$  na verdade é uma integral, pelo simples fato de  $k$  poder assumir valores contínuos.

Substituindo a equação (1.61) na equação (1.69), segue que a corrente persistente para o nosso sistema é dada por:

$$I_{n,m,k} = \frac{e\omega}{4\pi} \left( \frac{|m - \beta k - \ell|}{L} - \frac{\omega^*}{\omega} \right). \quad (1.71)$$

Note que a corrente persistente é uma função do fluxo Aharonov-Bohm e do vetor de Burgers. Deve-se também observar a dependência da corrente persistente com relação a velocidade de rotação  $\Omega$ .

O campo magnético desempenha um papel muito importante sobre as propriedades físicas dos anéis quânticos. Em contrapartida, para um regime de altas rotações ( $\Omega \gg \omega_c$ ) ou para campos magnéticos fracos ( $B \approx 0$ ) o efeito da rotação se torna mais importante do que a contribuição do campo magnético. Nesse limite, segue que  $\omega \rightarrow \omega_0$  e  $\omega^* \rightarrow 2\Omega$ , o que nos leva à seguinte expressão para a corrente persistente:

$$I_{n,m,k} = \frac{e\omega_0}{4\pi} \left( \frac{|m - \beta k - \ell|}{L} - \frac{2\Omega}{\omega_0} \right). \quad (1.72)$$

### 1.2.3.1 Limite para o ponto quântico

Pelo fato do potencial de Tan-Inkson (1.10) ser um modelo muito versátil, podemos utilizá-lo para descrever diversas estruturas quânticas. Um ponto quântico é modelado por um confinamento parabólico. Sendo assim, fazendo  $a_1 = 0$  na equação (1.10) obtemos que

$$V(\rho) = a_2 \rho^2, \quad (1.73)$$

isto é, a equação (1.73) descreve o potencial de confinamento para um ponto quântico.

Vamos agora obter uma expressão para a corrente persistente de um ponto quântico. Fazendo agora  $a_1 = 0$  na equação (1.71), chegamos à seguinte expressão para a corrente persistente de um ponto quântico:

$$I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell \neq 0} = \begin{cases} -\frac{e(\omega^* - \omega)}{4\pi} = -\frac{e(\omega_c - \omega)}{4\pi} - \frac{e2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell > 0, \\ -\frac{e(\omega^* + \omega)}{4\pi} = -\frac{e(\omega_c + \omega)}{4\pi} - \frac{e2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell < 0. \end{cases} \quad (1.74)$$

A expressão (1.74) só é válida para estados em que  $m - \beta k - \ell \neq 0$ . Isso se deve ao fato de que a função de onda dos estados com  $m - \beta k - \ell = 0$  pode assumir um valor não nulo para  $\rho = 0$ . Nessas condições, a relação de Byers-Yang utilizada para obter a expressão (1.71) não pode mais ser utilizada.

No entanto, uma vez que a equação (1.71) se aplica a todos os estados com  $a_1 \neq 0$ , a corrente transportada em um ponto quântico por um estado com  $m - \beta k - \ell = 0$  pode ser obtida tomando o limite:

$$\begin{aligned} I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell=0} &= \lim_{a_1 \rightarrow 0^+} \left[ \lim_{(m-\beta k) \rightarrow \ell} \frac{e\omega}{4\pi} \left( \frac{|m - \beta k - \ell|}{L} - \frac{\omega^*}{\omega} \right) \right] \\ &= -\frac{e\omega^*}{4\pi} \\ &= -\frac{e\omega_c}{4\pi} - \frac{e2\Omega}{4\pi}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Note que se desconsiderarmos na equação (1.75) as contribuições provenientes da rotação e do defeito topológico, isto é, fazendo  $\beta \rightarrow 0$  e  $\Omega \rightarrow 0$ , recuperamos o mesmo resultado obtido em [14] por Avishai e Kohmoto para pontos quânticos na presença de um campo magnético intenso.

Vamos agora analisar o comportamento do anel e do ponto quântico no regime de campo magnético nulo. Fazendo  $B = 0$  nas equações (1.71), (1.74) e (1.75), obtemos para o anel quântico que

$$I_{n,m,k} = \frac{e\omega_0}{4\pi} \left( \frac{|m - \beta k - \ell|}{L} - \frac{2\Omega}{\omega_0} \right). \quad (1.76)$$

Já para o ponto quântico, segue que

$$I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell \neq 0} = \begin{cases} +\frac{e\omega_0}{4\pi} - \frac{e2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell > 0, \\ -\frac{e\omega_0}{4\pi} - \frac{e2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell < 0. \end{cases} \quad (1.77)$$

e que

$$I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell=0} = -\frac{e2\Omega}{4\pi}. \quad (1.78)$$

As equações (1.76), (1.77) e (1.78) nos mostram alguns resultados muito interessantes. Essas três equações nos mostram que a existência de correntes persistente em anéis e pontos quânticos é possível, mesmo na ausência de campos magnéticos – o confinamento do potencial de Tan-Inkson e a presença de rotação são suficientes para induzirem esse efeito. Também podemos observar que o sentido dessas correntes é sempre oposto ao sentido da rotação.

#### 1.2.4 Magnetização

Vamos agora obter uma expressão para a magnetização de quasipartículas carregadas confinadas em um anel quântico girante e analisar sua relação com a corrente persistente.

A magnetização de um sistema contendo um número fixo de elétrons à temperatura nula é dada pela seguinte relação termodinâmica

$$\mathcal{M} = -\frac{\partial U}{\partial B} \Big|_N, \quad (1.79)$$

onde  $B$  é o módulo do campo magnético aplicado ao sistema e

$$U = \sum_{n,m,k} \mathcal{E}_{n,m,k} \quad (1.80)$$

é a energia total do sistema. A soma deve ser realizada sobre todos os estados ocupados.

Desconsiderando o conjunto de valores medidos a campo magnético nulo, onde a magnetização é descontínua, podemos reescrever a equação (1.79) assim:

$$\mathcal{M} = \sum_{n,m,k} \mathcal{M}_{n,m,k}, \quad (1.81)$$

onde  $\mathcal{M}_{n,m,k}$  é o momento magnético do  $(n, m, k)$ -ésimo estado. Vemos facilmente das equações que

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = -\frac{\partial \mathcal{E}_{n,m,k}}{\partial B} \Big|_N, \quad (1.82)$$

onde  $\mathcal{E}_{n,m,k}$  é o autovalor de energia do estado  $(n, m, k)$ .

De acordo com a equação (1.81), a magnetização do sistema é igual a soma momentos magnéticos de todos estados ocupados. Por mera força de expressão, em algumas situações utilizaremos momento magnético e magnetização como sinônimos.

Substituindo o espectro de energia (1.61) na equação (1.82), segue que o momento magnético para o nosso sistema é dado por:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = -\frac{e\hbar}{m^*} \left[ \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \left( 1 + 2\frac{\Omega}{\omega_c} \right) \frac{\omega_c}{\omega} - \frac{1}{2} (m - \beta k - \ell) \right]. \quad (1.83)$$

Como podemos perceber, a magnetização para o nosso sistema de partículas carregadas é da ordem do magneton de Bohr

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m^*}. \quad (1.84)$$

Vale a pena notar que podemos representar a magnetização em termos da corrente persistente. Para tanto, definindo o raio efetivo em termos do comprimento magnético  $\lambda_0$

$$r_{n,m,k} = (2L)^{1/2} \lambda_0, \quad (1.85)$$

ficamos aptos a relacionar a o momento magnético e a corrente através da seguinte equação:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = \pi r_{n,m,k}^2 I_{n,m,k} - \frac{e\hbar}{m^*} \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\omega_c}{\omega} + 2\frac{\Omega}{\omega} \right). \quad (1.86)$$

Podemos ainda expressar a magnetização (1.86) da seguinte forma:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = \mathcal{M}_{n,m,k}^{CL} + \mathcal{M}_{n,m,k}^{DS} + \mathcal{M}_{n,m,k}^{DSR}, \quad (1.87)$$

onde

$$\mathcal{M}_{n,m,k}^{CL} = \pi r_{n,m,k}^2 I_{n,m,k} \quad (1.88)$$

é a contribuição semelhante a de um momento de dipolo de uma espira circular [55] de raio  $r_{n,m,k}$  percorrida por uma corrente  $I_{n,m,k}$ . É nesse termo que vemos a dependência da magnetização com relação ao defeito, uma vez que a corrente persistente (1.71) depende explicitamente do parâmetro  $\beta$ .

O termo

$$\mathcal{M}_{n,m,k}^{DS} = -2\mu_B \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\omega_c}{\omega} \quad (1.89)$$

é o termo de shift diamagnético associado com o campo magnético. Esse termo também depende explicitamente da rotação, mas sua forma funcional é semelhante ao resultado obtido por Tan e Inkson [12]. Finalmente, a terceira contribuição, dada por

$$\mathcal{M}_{n,m,k}^{DSR} = -\mu_B \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\Omega}{\omega}, \quad (1.90)$$

representa uma espécie de deslocamento diamagnético, só que sua origem não é magnética, mas sim puramente não-inercial.

Como podemos perceber, para um regime onde a frequência ciclotron  $\omega_c$  é da ordem da frequência de rotação do sistema de referência  $\Omega$  ( $\omega_c \approx \Omega$ ), a contribuição diamagnética (1.89) é mais apreciável do que a contribuição referente a rotação (1.90).

Também devemos salientar que no limite de campo magnético fraco, maior é a importância da contribuição dos efeitos não-inerciais sobre a equação (1.86).

Além disso, quando fazemos  $\Omega$  e  $\beta$  iguais a zero, recuperamos a expressão do momento magnético para um anel quântico em um sistema de referência inercial e em uma geometria euclidiana [12], como era de se esperar.

## 1.3 Considerações Finais

Neste capítulo, nós estudamos os efeitos da rotação em um anel quântico bidimensional. A dinâmica quântica de uma partícula carregada foi analisada via resolução da equação de Schrödinger levando-se em conta o confinamento de um anel quântico girante. Obtivemos o espectro de energia para o nosso sistema tanto no caso de um espaço plano (1.36), assim como em um espaço com torção introduzida pela presença de uma deslocação tipo-hélice (1.61). A contribuição do defeito topológico sobre os níveis de energia é semelhante à contribuição do fluxo de Aharonov-Bohm – essas duas contribuições apenas introduzem uma mudança no número quântico  $m$ . Ficou evidenciado que a rotação desempenha um papel muito importante sobre a dinâmica da partícula. Vemos claramente na equação (1.62) que a rotação desempenha sobre a dinâmica das partículas um papel análogo ao de um campo magnético.

De posse do espectro de energia, obtivemos a corrente persistente e a magnetização para um anel quântico e mostramos que existe uma relação muito próxima entre essas duas grandezas. Mais uma vez, a equação (1.72) nos mostra claramente como a rotação influencia as propriedades físicas de partículas confinadas em anéis quânticos. Por fim, mostramos que a magnetização pode ser expressa como sendo a soma de três contribuições e que essas três contribuições são direta ou indiretamente influenciadas pela rotação.

Em suma, todos resultados aqui apresentados são inéditos e mostram claramente que efeitos não-inerciais desempenham um papel muito importante sobre as propriedades físicas de partículas quânticas confinadas em anéis e pontos quânticos.





## 2 Efeitos Não-Inerciais sobre a Dinâmica Quântica de um Dipolo Magnético

Neste capítulo, apresentamos pela primeira vez como efeitos não-inerciais influenciam a dinâmica quântica de uma partícula neutra, dotada de momento de dipolo magnético permanente, confinada em um anel quântico. Além da rotação, também investigaremos como a presença de um defeito topológico pode alterar as propriedades físicas do nosso sistema. Os resultados apresentados neste capítulo estão sob fase de submissão e serão publicados em breve, conforme a referência [48].

### 2.1 Introdução

Sabe-se que do ponto de vista clássico uma partícula neutra não interage com campos elétricos e magnéticos. Em contrapartida, se essa partícula neutra apresentar, por exemplo, um momento de dipolo elétrico efetivo e for colocada na presença de um campo elétrico uniforme, observa-se que seu momento de dipolo tende a se alinhar às linhas de campo elétrico. Agora se esse dipolo for colocado na presença de um campo magnético, não se observa nenhuma interação. Para um dipolo de natureza magnética temos um comportamento semelhante: ele tende a se alinhar com as linhas de campo magnético, e nada acontece quando interage com campos elétricos. Classicamente, dipolos elétricos são apenas afetados por campos elétricos, enquanto dipolos magnéticos são apenas afetados por campos magnéticos.

Em 1984 esse paradigma começou a mudar. Aharonov-Casher [56] mostraram que uma partícula neutra dotada de momento de dipolo magnético pode sim interagir com um campo elétrico. A função de onda da partícula neutra adquire um fator de fase ao interagir com o campo elétrico. Como esse efeito é puramente quântico e sua verificação envolve experimentos de interferência quântica, sua constatação no regime clássico não seria possível.

O efeito Aharonov-Casher prevê que se uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente descrever um caminho fechado em torno de uma linha de cargas elétricas, a sua função de onda irá adquirir uma fase geométrica [ver figura (10)]. A interação entre o dipolo magnético e o campo elétrico gerado pela linha de cargas elétricas é descrita pelo potencial vetor de Aharonov-Casher, definido assim:

$$\mathbf{A}_{AC} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E}, \quad (2.1)$$

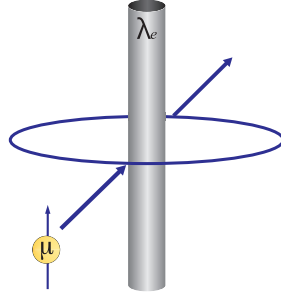


Figura 10 – Ilustração do efeito Aharonov-Casher. Partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente  $\mu$  interagindo com o campo elétrico criado por uma distribuição linear de cargas elétricas.

onde  $\mu$  é o momento de dipolo magnético da partícula neutra e

$$\mathbf{E} = \left( \frac{\lambda_e}{2\pi\rho} \right) \hat{\rho} \quad (2.2)$$

é o campo elétrico gerado pela linha de carga, cuja densidade linear de carga é  $\lambda_e$ . Alinhando o momento de dipolo ao longo do eixo  $z$ , o potencial vetor de Aharonov-Casher é dado por:

$$\mathbf{A}_{AC} = \left( \frac{\mu \lambda_e}{2\pi\rho} \right) \hat{\phi} \quad (2.3)$$

Como vimos na (1.4), a diferença de fase que a partícula adquire envolve a integral do potencial vetor em torno de um circuito fechado. Sendo assim, a fase de Aharonov-Casher é dada por

$$\Delta g = \oint_C \mathbf{A}_{AC} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_C \left( \frac{\mu \lambda_e}{2\pi\rho} \right) (\rho d\phi) = \mu \lambda_e. \quad (2.4)$$

Como podemos perceber, o incremento na fase da função de onda da partícula neutra no caso do efeito Aharonov-Casher é proporcional ao seu momento de dipolo magnético e a densidade linear de cargas elétricas. Um aspecto interessante desse efeito é que, diferente da fase associada ao efeito Aharonov-Bohm, a fase que a partícula adquire é uma fase geométrica. Uma boa discussão sobre a natureza das fases de origem quântica foi feita por Dowling et al. [57].

Além da fase quântica para o dipolo magnético associada ao efeito Aharonov-Casher, também existe uma quantização análoga à de Landau para a partícula neutra. Num primeiro momento, Ericsson e Sjöqvist [58] propuseram condições para as quais um átomo neutro venha a apresentar um espectro de energia semelhante ao de uma partícula carregada em um campo magnético uniforme. Baseados no efeito Aharonov-Casher, eles demonstram quais as condições entre o campo magnético. Suscintamente, as condições

impostas por Ericsson e Sjöqvist impõem que o momento de dipolo magnético deve ter seu movimento restrito ao plano  $x - y$ , sua orientação deve ser ao longo do eixo  $z$  e o campo elétrico também deve estar restrito ao plano  $x - y$ . Seguindo as orientações de Ericsson e Sjöqvist, Ribeiro [59] chegaram ao seguinte espectro de energia para o dipolo magnético:

$$\mathcal{E}_{n,m} = \left( n + \frac{|m|}{2} - \frac{\sigma}{2} (m - 1) + \frac{1}{2} \right) \omega_{AC}, \quad (2.5)$$

onde  $\sigma = \pm 1$  representa o sentido de revolução do dipolo e

$$\omega_{AC} = \frac{\mu \lambda_e}{m^*}. \quad (2.6)$$

é a frequência Aharonov-Casher.

## 2.2 Partícula Neutra com Momento de Dipolo Magnético Confinada em um Anel Quântico sob Rotação

Nesta seção, estudaremos a dinâmica quântica de uma partícula neutra confinada pelo potencial de um anel quântico girante.

No limite não-relativístico, o Hamiltoniano<sup>1</sup> que descreve a dinâmica quântica de um átomo neutro (de massa  $m^*$  e momento de dipolo magnético  $\boldsymbol{\mu}$ ) que interage com um campo elétrico  $\mathbf{E}$  é dado por [58]:

$$H = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{AC})^2 + \frac{\mu}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{A}_{AC}$  é o potencial vetor de Aharonov-Casher que, por sua vez, é dado por

$$\mathbf{A}_{AC} = \mu \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad (2.8)$$

onde  $\mu$  e  $\mathbf{n}$  são respectivamente o módulo e a direção do momento de dipolo magnético.

Considerando que o momento de dipolo esteja orientado na direção  $z$  e adotando a seguinte configuração para o campo elétrico:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda_e}{2} \rho \hat{\rho}, \quad (2.9)$$

onde  $\lambda_e$  representa uma densidade linear de carga, segue que o potencial vetor de Aharonov-Casher fica assim:

$$\mathbf{A}_{AC} = \left( \frac{\mu \lambda_e}{2} \rho \right) \hat{\phi}. \quad (2.10)$$

---

<sup>1</sup> Como estamos restringindo nossa análise ao limite não-relativístico, a contribuição do termo  $\frac{\mu^2 E^2}{2m^* c^2}$  presente na descrição de Anandan [60, 61] é muito pequena e, por isso, será negligenciada.

Associado ao potencial vetor (2.10), temos o seguinte campo magnético efetivo

$$\mathbf{B}_{AC} = (\mu\lambda_e) \hat{z}, \quad (2.11)$$

conhecido como o campo magnético de Aharonov-Casher. Esse termo é quem garante que a partícula neutra tenha uma quantização de energia análoga à quantização de Landau para um partícula carregada [52].

Além da quantização de Landau, estamos interessados em investigar efeitos de correntes de spin para partículas neutras. Para tanto, devemos ter um campo magnético efetivo com a mesma forma funcional para partículas carregadas [conf. equação (1.11)], isto é,

$$\mathbf{B}_{ef} = [B_{AC} + \Phi_{AC} \delta^2(\rho)] \hat{z}, \quad (2.12)$$

onde  $\delta^2(\rho)$  é a função delta de Dirac em duas dimensões e  $\Phi_{AC} = \ell \phi_{AC}$  é o fluxo Aharonov-Casher associado com a fase geométrica de Aharonov-Casher  $\phi_{AC}$  [62] e  $\ell$  é um número intero. O potencial vetor que nos fornece o campo magnético efetivo (2.12) é dado por

$$\mathbf{A}_{\Phi_{AC}} = \left( \frac{\mu\lambda_e}{2} \rho + \frac{\Phi_{AC}}{2\pi} \frac{1}{\rho} \right) \hat{\phi}, \quad (2.13)$$

onde vemos claramente que o primeiro termo é exatamente o acoplamento de Aharonov-Casher, enquanto o segundo é responsável pela criação fluxo Aharonov-Casher.

Desse modo, o Hamiltoniano que nos possibilita estudar tanto efeitos de quantização de Landau, assim como de correntes de spin para partículas neutras é dado por:

$$H = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{AC}})^2 + \frac{\mu}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{E}. \quad (2.14)$$

Introduzindo agora a contribuição de um anel quântico, a equação (2.14) fica assim:

$$H = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{AC}})^2 + \frac{\mu}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{E} + V(\rho), \quad (2.15)$$

onde  $V(\rho)$  é o potencial de confinamento de um anel quântico, conhecido como potencial de Tan-Inkson, que é dado por

$$V(\rho) = \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0, \quad (2.16)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são parâmetros constantes e  $V_0 = 2\sqrt{a_1 a_2}$ .

Vamos agora introduzir a contribuição da rotação para a dinâmica quântica da partícula. O Hamiltoniano  $H$  dado na equação (2.15) é definido em um sistema de referência inercial. Definiremos agora um Hamiltoniano  $H_\Omega$  em um sistema de referência que gira com velocidade angular constante  $\Omega$  em torno de um eixo fixo. Esses dois Hamiltonianos se relacionam da seguinte forma:

$$H_\Omega = H - \Omega \cdot \mathbf{L}, \quad (2.17)$$

onde  $\mathbf{L}$  é o momento angular da partícula.

Substituindo a equação (2.15) na equação (2.17), temos que

$$H_{\Omega} = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{AC}})^2 + \frac{\mu}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{E} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L} + V(\rho). \quad (2.18)$$

e lembrando que  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  e tendo em mente que, para o nosso caso, o vetor  $\mathbf{r}$  serve para localizar um ponto fixo sobre o anel, segue que

$$\begin{aligned} H_{\Omega} &= \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{AC}})^2 + \frac{\mu}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{E} - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + V(\rho) \\ &= \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{AC}})^2 + \frac{\mu}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + V(\rho). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Pelo fato de considerarmos uma rotação  $\boldsymbol{\Omega}$  constante, podemos reescrever a equação anterior de uma forma mais conveniente:

$$\begin{aligned} H_{\Omega} &= \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{AC}} - m^* (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}))^2 - \frac{1}{2} m^* (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \\ &\quad + \frac{\mu}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{E} + V(\rho). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Como podemos notar, o termo cinético do Hamiltoniano (2.20) possui, além do acoplamento mínimo com o potencial vetor de Aharonov-Casher, um termo extra associado com a rotação do sistema de referência. Essa termo extra sugere que a força de Coriolis presente no sistema de referência não-inercial faz um papel análogo ao da força de Lorentz que atua sobre uma partícula carregada em um campo magnético uniforme. Com isso em mente, é válido pensar que o termo  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  dentro do termo cinético se comporta como um acoplamento mínimo e pode ser entendido como um potencial vetor efetivo associado ao efeito não-inercial de rotação, isto é,

$$\mathbf{A}_{\Omega} \equiv \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (2.21)$$

Considerando um ponto fixo sobre o anel localizado pelo vetor  $\mathbf{r} = (\rho, 0, 0)$  e que esse ponto descreve uma rotação  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{z}$  em torno do eixo  $\hat{z}$ , o potencial vetor efetivo  $\mathbf{A}_{\Omega}$  associado ao efeito não-inercial de rotação fica assim:

$$\mathbf{A}_{\Omega} = \Omega \rho \hat{\phi}. \quad (2.22)$$

A equação (2.20) é, portanto, o Hamiltoniano que descreve a dinâmica quântica de uma partícula neutra (com momento de dipolo magnético não-nulo), confinada em um anel quântico girante. Iremos agora proceder com a resolução da equação de Schrödinger associada a esse Hamiltoniano em duas situações distintas: primeiramente, obteremos os autovalores de energia e as autofunções considerando um espaço-tempo plano e logo em seguida, a equação de Schrödinger será resolvida no background de uma deslocação tipo-hélice.

### 2.2.1 Anel Quântico sob Rotação em um Espaço Plano

Nesta seção, resolveremos a equação de Schrödinger a fim de estudarmos a dinâmica quântica de um dipolo magnético confinado pelo potencial de um anel quântico girante, considerando o espaço-tempo plano.

Pelo fato de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}_\Omega$  apresentarem uma contribuição não nula apenas na direção azimutal, segue que o Hamiltoniano (2.20) escrito em coordenadas cilíndricas, num espaço-tempo plano fica assim:

$$H_\Omega = -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right) - i(A_{\Phi_{AC}})_\phi - im^*(A_\Omega)_\phi \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} m^* (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 + \frac{\mu}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{E} + V(\rho). \quad (2.23)$$

Agora, iremos proceder com a resolução da equação de Schrödinger associada ao Hamiltoniano (2.23). Substituindo as contribuições do campo elétrico (2.9), do potencial vetor de Aharonov-Casher modificado (2.13), da rotação (2.22) e do potencial de Tan-Inkson (2.16) na equação (2.23), tal Hamiltoniano assume a seguinte forma

$$H_\Omega = -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\Phi_{AC}}{2\pi} \right) - \frac{im^*}{2} \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} + 2\Omega \right) \rho \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} m^* \Omega^2 \rho^2 + \frac{\mu\lambda_e}{2m^*} + \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0. \quad (2.24)$$

A equação de Schrödinger independente do tempo associada ao Hamiltoniano (2.24) é dada por

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\Phi_{AC}}{2\pi} \right)^2 - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right. \\ & \quad \cdot \left( \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right) \right) \rho^2 - im^* \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} + 2\Omega \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\Phi_{AC}}{2\pi} \right) - \\ & \quad \left. - 2m^* \left( \frac{\mu\lambda_e}{2m^*} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi + \left[ \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0 \right] \Psi = \mathcal{E} \Psi. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Depois de algumas manipulações matemáticas, temos que

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\Phi_{AC}}{2\pi} \right)^2 - 2m^* a_1 \right] - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right. \\ & \quad \cdot \left( \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right) \rho^2 - im^* \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} + 2\Omega \right) \cdot \\ & \quad \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\Phi_{AC}}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} - \frac{\mu\lambda_e}{2m^*} \right) \left. \right] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Lembrando que  $\Phi_{AC} = \ell \phi_{AC}$ , a equação anterior fica assim:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i\ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right)^2 - 2m^* a_1 \right] - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right. \\ & \quad \cdot \left( \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right) \rho^2 - im^* \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} + 2\Omega \right) \\ & \quad \cdot \left. \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i\ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} - \frac{\mu\lambda_e}{2m^*} \right) \right] \Psi = 0. \quad (2.27) \end{aligned}$$

Devido a simetria do problema, utilizamos o seguinte anzats

$$\Psi = A R(\rho) e^{im\phi} e^{ikz}, \quad (2.28)$$

onde  $A$  é a constante de normalização. Depois de algumas transformações, obtemos a seguinte equação radial

$$\begin{aligned} & R'' + \frac{1}{\rho} R' - \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( m - \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right)^2 + 2m^* a_1 \right] R - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \cdot \\ & \quad \cdot \left[ \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right] \rho^2 R + \left[ m^* \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} + 2\Omega \right) \left( m - \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right) - k^2 + \right. \\ & \quad \left. + 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} - \frac{\mu\lambda_e}{2m^*} \right) \right] R = 0. \quad (2.29) \end{aligned}$$

Introduzindo as seguintes definições

$$\begin{aligned} \omega_{AC}^2 &= \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right)^2; \\ \omega_0^2 &= \frac{8a_2}{m^*}; \\ \omega^2 &= \omega_{AC}^2 + 4\Omega\omega_{AC} + \omega_0^2; \\ L^2 &= \left( m - \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right)^2 + 2m^* a_1; \\ \gamma' &= 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} - \frac{\mu\lambda_e}{2m^*} \right) + m^* \omega^* \left( m - \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right) - k^2; \\ \omega^* &= \omega_{AC} + 2\Omega, \end{aligned} \quad (2.30)$$

a equação radial (2.29) assume uma forma bem conhecida:

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left[ -\frac{m^{*2}\omega^2}{4} \rho^2 + \gamma' - \frac{L^2}{\rho^2} \right] R = 0. \quad (2.31)$$

É importante notar que a frequência e Aharonov-Casher  $\omega_{AC}$  fará o papel da frequência de Landau  $\omega$  caso a partícula esteja livre do confinamento do anel e na ausência de rotação, isto é, sempre que as condições  $a_1 \rightarrow 0$ ,  $a_2 \rightarrow 0$  e  $\Omega \rightarrow 0$  forem satisfeitas.

Procedendo com a seguinte mudança de variáveis

$$\xi = \frac{m^* \omega}{2} \rho^2 \quad (2.32)$$

podemos reescrever a equação (2.31) assim:

$$\xi \ddot{R} + \dot{R} + \left[ -\frac{\xi}{4} + \gamma - \frac{L^2}{4\xi} \right] R = 0, \quad (2.33)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{2m^* \omega} \left[ 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} - \frac{\omega_{AC}}{2} \right) + m^* \omega^* \left( m - \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right) - k^2 \right]. \quad (2.34)$$

Analizando o comportamento da equação (2.33) nos limites assintóticos, isto é, para  $\xi \rightarrow 0$  and para  $\xi \rightarrow \infty$  [conf. (A.1)], podemos escrever uma solução para a equação (2.33) na seguinte forma:

$$R(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{|L|/2} \zeta(\xi), \quad (2.35)$$

Substituindo então a equação (2.36) na equação (2.33), verifica-se facilmente que a função  $\zeta(\xi)$  obedece à seguinte equação diferencial:

$$\xi \ddot{\zeta} + (|L| + 1 - \xi) \dot{\zeta} - \left[ \frac{|L| + 1}{2} - \gamma \right] \zeta = 0, \quad (2.36)$$

onde (2.36) é a equação hipergeométrica, cuja solução é a função hipergeométrica confluyente:

$$\zeta(\xi) = F \left[ - \left( \gamma - \frac{|L| + 1}{2} \right); |L| + 1; \xi \right]. \quad (2.37)$$

A quantização da energia vem do fato de que a função hipergeométrica deve obedecer a uma condição de convergência, condição esta que é satisfeita quando o primeiro parâmetro da função hipergeométrica (2.37) for igual a um número inteiro negativo, isto é:

$$- \left( \gamma - \frac{|L| + 1}{2} \right) = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.38)$$

Substituindo a equação (2.34) na equação (2.38), segue que

$$- \left( \frac{1}{2m^* \omega} \left[ 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} - \frac{\omega_{AC}}{2} \right) + m^* \omega^* \left( m - \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right) - k^2 \right] - \frac{|L| + 1}{2} \right) = -n \quad (2.39)$$

A partir daí, facilmente obtemos o seguinte espectro de energia:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2} (m - \ell^*) \omega^* + \frac{1}{2} \omega_{AC} - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{k^2}{2m^*}, \quad (2.40)$$

onde

$$\ell^* = \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \quad (2.41)$$



foi introduzido para simplificar a notação.

Os números quânticos  $n$ ,  $m$  e  $k$  caracterizam respectivamente o movimento da partícula na direção radial, o momento angular e o movimento da partícula na direção  $z$ . Devido a condição de quantização imposta pela função hipergeométrica, o número quântico  $n$  deve ser um número inteiro maior ou igual a zero. Como a função de onda apresenta condição de contorno periódica na direção azimutal, o número quântico  $m$  pode assumir qualquer valor inteiro. Por fim, o número quântico  $k$  pode assumir qualquer valor de  $-\infty$  a  $+\infty$ , pelo fato de o movimento da partícula não ser quantizado nessa direção.

Vemos claramente na equação (2.40) que a única contribuição do fluxo Aharonov-Bohm sobre os autovalores de energia é de alterar o número quântico  $m$  para  $(m - \ell)$ . Além disso, os níveis de energia são caracterizados por três frequências:  $\omega$ ,  $\omega^*$  e  $\omega_0$ . A primeira é a frequência de Landau  $\omega$  que depende da frequência de Aharonov-Casher, do coeficiente  $a_2$  do potencial de Tan-Inkson e também da velocidade angular  $\Omega$ . A segunda frequência  $\omega^*$  depende tanto da frequência de Aharonov-Casher  $\omega_{AC}$  quanto da rotação  $\Omega$ . Finalmente, a terceira frequência  $\omega_0$  é a frequência característica do potencial de confinamento de Tan-Inkson que, por sua vez, depende apenas do parâmetro  $a_2$ . A equação (2.66) apresenta traços de um análogo à quantização de Landau, em contrapartida as relações de degenerescência aqui são diferentes: o nosso sistema só é degenerado com respeito ao número quântico  $m$  quando  $a_1 = a_2 = 0$ .

Considerando o limite para o qual o sistema de referência não gira ( $\Omega = 0$ ), não existe nenhum fluxo Aharonov-Casher atravessando o centro do anel ( $\phi_{AC} = 0$ ) e o confinamento é desconsiderado ( $a_1 = a_2 = 0$ ), a equação (2.40) assume a seguinte forma:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|m|}{2} - \frac{1}{2}(m-1) + \frac{1}{2} \right) \omega_{AC} + \frac{k^2}{2m^*}, \quad (m \geq \ell), \quad (2.42)$$

isto é, recuperamos o resultado obtido por [59], apresentado na equação (2.5).

Vamos agora obter as autofunções de energia. Substituindo a equação (2.63) na (2.36) e voltando para a variável  $\rho$ , temos que

$$R(\rho) = \left( \frac{1}{2^{|L|}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho}{\lambda_0} \right)^{|L|} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right]. \quad (2.43)$$

Reunindo agora as equações (2.28) e (2.43), a função de onda não normalizada para o nosso problema fica assim:

$$\Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = A \left( \frac{1}{2^{|L|}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho}{\lambda_0} \right)^{|L|} e^{im\phi} e^{ikz} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right]. \quad (2.44)$$

Da equação (22) temos que

$$A = \frac{1}{\lambda_0} \left[ \frac{(n + |L|)!}{2^n n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2}, \quad (2.45)$$

o que, finalmente, nos leva às seguintes autofunções normalizadas:

$$\Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\lambda_0^{|L|+1}} \left[ \frac{\Gamma(n + |L| + 1)}{2^{|L|+1} n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2} \cdot e^{im\phi} e^{ikz} \rho^{|L|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2}\right) F\left[-n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2}\right], \quad (2.46)$$

onde

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{1}{m^*\omega}} \quad (2.47)$$

é o comprimento magnético renormalizado pela interação de Aharonov-Casher, pelo confinamento do anel e pelo efeito não-inercial. O comprimento magnético  $\lambda_0$  representa a amplitude de oscilação e também serve como um fator de escala, dando as dimensões típicas do sistema.

### 2.2.2 Anel Quântico sob Rotação no Espaço de uma Deslocação Tipo-Hélice

Agora iremos resolver a equação de Schrödinger para o dipolo magnético em um anel quântico girante, em um espaço distorcido pela presença de uma deslocação tipo-hélice.

Precisamos introduzir a contribuição da geometria, escrevendo a equação (2.20) no background de uma deslocação tipo-hélice. A forma como distâncias são medidas em um espaço com uma deslocação tipo-hélice ao considerar a seguinte métrica tridimensional:

$$ds^2 = d\rho^2 + (dz + \beta d\phi)^2 + \rho^2 d\phi^2, \quad (2.48)$$

onde  $\rho > 0$ ,  $0 < \phi < 2\pi$  e  $-\infty < z < \infty$ . Na métrica (2.48), a única componente não nula do vetor de Burges é a componente na direção  $\hat{z}$ , isto é,  $b^z = 2\pi\beta$ .

Para investigar quais são as contribuições desse defeito sobre as propriedades da partícula neutra confinada em um anel quântico sob rotação, precisamos escrever o Hamiltoniano (2.20) no background da métrica (2.48).

Pelo fato de  $\mathbf{A}_{\Phi_{AC}}$  e  $\mathbf{A}_\Omega$  apresentarem uma contribuição não nula apenas na direção azimutal, segue que

$$H_\Omega = -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right) - i(A_{\Phi_{AC}})_\phi - im^*(A_\Omega)_\phi \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} m^* (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 + \frac{\mu}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{E} + V(\rho). \quad (2.49)$$

Agora, iremos proceder com a resolução da equação de Schrödinger associada ao Hamiltoniano (2.49). Substituindo as contribuições do campo elétrico (2.9), do potencial vetor de Aharonov-Casher modificado (2.13), da rotação (2.22) e do potencial de Tan-

Inkson (2.16) na equação (2.49), tal Hamiltoniano assume a seguinte forma

$$H_{\Omega} = -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{AC}}{2\pi} \right) - \frac{im^*}{2} \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} + 2\Omega \right) \rho \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} m^* \Omega^2 \rho^2 + \frac{\mu\lambda_e}{2m^*} + \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0. \quad (2.50)$$

A equação de Schrödinger independente do tempo associada ao Hamiltoniano (2.50) é dada por

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{AC}}{2\pi} \right)^2 - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right] \cdot \\ & \cdot \left( \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right) \right) \rho^2 - im^* \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} + 2\Omega \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{AC}}{2\pi} \right) - \\ & - 2m^* \left( \frac{\mu\lambda_e}{2m^*} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Big] \Psi + \left[ \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0 \right] \Psi = \mathcal{E} \Psi. \quad (2.51) \end{aligned}$$

Depois de algumas manipulações matemáticas, temos que

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{AC}}{2\pi} \right)^2 - 2m^* a_1 \right] - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right] \cdot \\ & \cdot \left( \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right) \rho^2 - im^* \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} + 2\Omega \right) \cdot \\ & \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{AC}}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} - \frac{\mu\lambda_e}{2m^*} \right) \Big] \Psi = 0. \quad (2.52) \end{aligned}$$

Lembrando que  $\Phi_{AC} = \ell \phi_{AC}$  a equação anterior fica assim:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i\ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right)^2 - 2m^* a_1 \right] - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right] \cdot \\ & \cdot \left( \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right) \rho^2 - im^* \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} + 2\Omega \right) \cdot \\ & \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i\ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} - \frac{\mu\lambda_e}{2m^*} \right) \Big] \Psi = 0. \quad (2.53) \end{aligned}$$

Devido a simetria do problema, utilizamos o seguinte anzats

$$\Psi = A R(\rho) e^{im\phi} e^{ikz} \quad (2.54)$$

onde  $A$  é a constante de normalização. Depois de algumas transformações, obtemos a

seguinte equação radial

$$\begin{aligned}
 R'' + \frac{1}{\rho}R' - \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right)^2 + 2m^*a_1 \right] R - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \cdot \\
 \cdot \left[ \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right] \rho^2 R + \left[ m^* \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} + 2\Omega \right) \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right) - k^2 + \right. \\
 \left. + 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} - \frac{\mu\lambda_e}{2m^*} \right) \right] R = 0. \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

Introduzindo as seguintes definições

$$\begin{aligned}
 \omega_{AC}^2 &= \left( \frac{\mu\lambda_e}{m^*} \right)^2; \\
 \omega_0^2 &= \frac{8a_2}{m^*}; \\
 \omega^2 &= \omega_{AC}^2 + 4\Omega\omega_{AC} + \omega_0^2; \\
 L^2 &= \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right)^2 + 2m^*a_1; \\
 \gamma' &= 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} - \frac{\mu\lambda_e}{2m^*} \right) + m^*\omega^* \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right) - k^2; \\
 \omega^* &= \omega_{AC} + 2\Omega, \quad (2.56)
 \end{aligned}$$

a equação radial (2.55) assume uma forma bem conhecida:

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' + \left[ -\frac{m^{*2}\omega^2}{4}\rho^2 + \gamma' - \frac{L^2}{\rho^2} \right] R = 0. \quad (2.57)$$

Procedendo com a seguinte mudança de variáveis

$$\xi = \frac{m^*\omega}{2}\rho^2 \quad (2.58)$$

podemos reescrever a equação (2.57) assim:

$$\xi \ddot{R} + \dot{R} + \left[ -\frac{\xi}{4} + \gamma - \frac{L^2}{4\xi} \right] R = 0, \quad (2.59)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{2m^*\omega} \left[ 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} - \frac{\omega_{AC}}{2} \right) + m^*\omega^* \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right) - k^2 \right]. \quad (2.60)$$

Analizando o comportamento da equação (2.59) nos limites assintóticos, isto é, para  $\xi \rightarrow 0$  and para  $\xi \rightarrow \infty$  [conf. (A.1)], podemos escrever uma solução para a equação (2.59) na seguinte forma:

$$R(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{L/2} \zeta(\xi), \quad (2.61)$$

Substituindo então a equação (2.61) na equação (2.59), verifica-se facilmente que a função  $\zeta(\xi)$  obedece à seguinte equação diferencial:

$$\xi\ddot{\zeta} + (|L| + 1 - \xi)\dot{\zeta} - \left[ \frac{|L| + 1}{2} - \gamma \right] \zeta = 0, \quad (2.62)$$

onde (2.62) é a equação hipergeométrica, cuja solução é a função hipergeométrica confluyente:

$$\zeta(\xi) = F \left[ - \left( \gamma - \frac{|L| + 1}{2} \right); |L| + 1; \xi \right]. \quad (2.63)$$

A quantização da energia vem do fato de que a função hipergeométrica deve obedecer a uma condição de convergência, condição esta que é satisfeita quando o primeiro parâmetro da função hipergeométrica (2.63) for igual a um número inteiro negativo, isto é:

$$- \left( \gamma - \frac{|L| + 1}{2} \right) = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.64)$$

Substituindo a equação (2.60) na equação (2.64), segue que

$$\begin{aligned} - \left( \frac{1}{2m^*\omega} \left[ 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} - \frac{\omega_{AC}}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + m^*\omega^* \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right) - k^2 \right] - \frac{|L| + 1}{2} \right) = -n \end{aligned} \quad (2.65)$$

A partir daí, facilmente obtemos o seguinte espectro de energia:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2} (m - \beta k - \ell^*) \omega^* + \frac{1}{2} \omega_{AC} - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{k^2}{2m^*}, \quad (2.66)$$

onde

$$\ell^* = \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \quad (2.67)$$

foi introduzido para simplificar a notação.

Os números quânticos  $n$ ,  $m$  e  $k$  caracterizam respectivamente o movimento da partícula na direção radial, o momento angular e o movimento da partícula na direção  $z$ . Devido a condição de quantização imposta pela função hipergeométrica, o número quântico  $n$  deve ser um número inteiro maior ou igual a zero. Como a função de onda apresenta condição de contorno periódica na direção azimutal, o número quântico  $m$  pode assumir qualquer valor inteiro. Por fim, o número quântico  $k$  pode assumir qualquer valor de  $-\infty$  a  $+\infty$ , pelo fato de o movimento da partícula não ser quantizado nessa direção.

Comparando as equações (2.40) e (2.66), vemos claramente que a única contribuição da presença do defeito topológico sobre os autovalores de energia é de, assim como o fluxo Aharonov-Bohm, alterar o número quântico  $m$  para  $(m - \beta k - \ell)$ . É fácil perceber que podemos obter o espectro de energia para o caso do espaço plano (2.40) a partir do espectro de energia obtido no background da deslocação tipo-hélice (2.66); basta tomar

$\beta = 0$ . A presença do defeito só tem efeito sobre o número quântico  $m$  – as três frequências ( $\omega, \omega^*$  e  $\omega_0$ ) que caracterizam o movimento da partícula para o caso sem defeito também são válidas aqui.

Considerando o limite para o qual a contribuição de Aharonov-Casher (2.8) é desconsiderada, isto é, fazendo  $\omega_{AC} \rightarrow 0$  na equação (2.66), segue que:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega_0 - (m - \beta k - \ell^*) \Omega - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{k^2}{2m^*}. \quad (2.68)$$

Como podemos perceber na equação (2.68), o confinamento proveniente do potencial de Tan-Inkson e o efeito não-inercial associado com a rotação do sistema de referência são suficientes para que a partícula ainda apresente uma quantização análoga a de Landau.

Vamos agora obter as autofunções de energia. Substituindo a equação (2.63) na (2.61) e voltando para a variável  $\rho$ , temos que

$$R(\rho) = \left( \frac{1}{2^{|L|}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho}{\lambda_0} \right)^{|L|} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right]. \quad (2.69)$$

Reunindo agora as equações (2.54) e (2.69), a função de onda não normalizada para o nosso problema fica assim:

$$\Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = A \left( \frac{1}{2^{|L|}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho}{\lambda_0} \right)^{|L|} e^{im\phi} e^{ikz} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right]. \quad (2.70)$$

Da equação (22) temos que

$$A = \frac{1}{\lambda_0} \left[ \frac{(n + |L|)!}{2n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2}, \quad (2.71)$$

o que, finalmente, nos leva às seguintes autofunções normalizadas:

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\lambda_0^{|L|+1}} \left[ \frac{\Gamma(n + |L| + 1)}{2^{|L|+1} n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2} \\ \cdot e^{im\phi} e^{ikz} \rho^{|L|} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right], \end{aligned} \quad (2.72)$$

onde

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{1}{m^* \omega}} \quad (2.73)$$

é o comprimento magnético renormalizado pela interação de Aharonov-Casher, pelo confinamento do anel e pelo efeito não-inercial. O comprimento magnético  $\lambda_0$  representa a amplitude de oscilação e também serve como um fator de escala, dando as dimensões típicas do sistema.

### 2.2.3 Corrente Persistente

Vamos agora obter uma expressão análoga para a corrente persistente associada com uma partícula neutra com momento de dipolo magnético confinada por um anel quântico girante. Vários artigos reportam efeitos de correntes persistentes de spin associadas ao efeito Aharonov-Casher [63, 64, 65, 66] em sistemas mesoscópicos.

Uma maneira de se obter a corrente carregada por um dado estado eletrônico  $\Psi_{n,m,k}$  é através da seguinte equação:

$$I_{n,m,k} = \int dz \int d\phi \int dr j_{n,m,k}(r, \phi, z), \quad (2.74)$$

onde  $j_{n,m,k}(r, \phi, z)$  é a densidade de corrente para esse estado quântico.

No entanto, já que conhecemos a expressão analítica para o espectro de energia, é mais conveniente calcular  $I_{n,m,k}$  usando a relação Byers-Yang [54]:

$$\begin{aligned} I_{n,m,k} &= -\frac{\partial E_{n,m,k}}{\partial \Phi_{AC}} \\ &\Downarrow \\ I_{n,m,k} &= -\frac{1}{\phi_{AC}} \frac{\partial E_{n,m,k}}{\partial \ell}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

lembrando que  $\phi_{AC}$  é a fase de Aharonov-Casher.

A corrente persistente total é, portanto, a soma das correntes carregadas por todos estados eletrônicos ocupados:

$$I = \sum_{n,m,k} I_{n,m,k}, \quad (2.76)$$

onde devemos ter em mente que a soma em  $k$  na verdade é uma integral, pelo simples fato de  $k$  poder assumir valores contínuos.

Substituindo a equação (2.66) na equação (2.75), segue que a corrente persistente para o nosso sistema é dada por:

$$I_{n,m,k} = \frac{\omega}{4\pi} \left( \frac{|m - \beta k - \ell^*|}{L} - \frac{\omega^*}{\omega} \right), \quad (2.77)$$

lembrando que  $\ell^* = \ell(\phi_{AC}/2\pi)$ .

Note que a corrente de spin é uma função do fluxo Aharonov-Casher (através do winding number  $\ell^*$ ) e do parâmetro  $\beta$  associado ao vetor de Burgers. Deve-se também observar a dependência da corrente persistente com relação a velocidade de rotação  $\Omega$ .

#### 2.2.3.1 Limite para o ponto quântico

Pelo fato de o potencial de Tan-Inkson (2.16) ser um modelo muito versátil, podemos utilizá-lo para descrever diversas estruturas quânticas. Um ponto quântico é modelado por

um confinamento parabólico. Sendo assim, fazendo  $a_1 = 0$  na equação (2.16) obtemos que

$$V(\rho) = a_2 \rho^2, \quad (2.78)$$

isto é, a equação (2.78) descreve o potencial de confinamento para um ponto quântico.

Vamos agora obter uma expressão para a corrente persistente de um ponto quântico. Fazendo agora  $a_1 = 0$  na equação (2.77), chegamos à seguinte expressão para a corrente persistente em um ponto quântico:

$$I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell^* \neq 0} = \begin{cases} -\frac{(\omega^* - \omega)}{4\pi} = -\frac{(\omega_{AC} - \omega)}{4\pi} - \frac{2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell^* > 0, \\ -\frac{(\omega^* + \omega)}{4\pi} = -\frac{(\omega_{AC} + \omega)}{4\pi} - \frac{2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell^* < 0. \end{cases} \quad (2.79)$$

A expressão (2.79) só é válida para estados em que  $m - \beta k - \ell^* \neq 0$ . Isso se deve ao fato de que a função de onda dos estados com  $m - \beta k - \ell^* = 0$  pode assumir um valor não nulo para  $\rho = 0$ . Nessas condições, a relação de Byers-Yang utilizada para obter a expressão (2.77) não pode mais ser utilizada.

No entanto, uma vez que a equação (2.77) se aplica a todos os estados com  $a_1 \neq 0$ , a corrente transportada em um ponto quântico por um estado com  $m - \beta k - \ell^* = 0$  pode ser obtida tomando o limite:

$$\begin{aligned} I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell^*=0} &= \lim_{a_1 \rightarrow 0^+} \left[ \lim_{(m-\beta k) \rightarrow \ell^*} \frac{\omega}{4\pi} \left( \frac{|m - \beta k - \ell^*|}{L} - \frac{\omega^*}{\omega} \right) \right] \\ &= -\frac{\omega^*}{4\pi} \\ &= -\frac{\omega_{AC}}{4\pi} - \frac{2\Omega}{4\pi}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Vamos agora analisar o comportamento da corrente de spin para o anel e para o ponto quântico sem a contribuição do potencial vetor de Aharonov-Casher. Fazendo  $\omega_{AC} \rightarrow 0$  nas equações (2.77), (2.79) e (2.80), obtemos para o anel quântico que

$$I_{n,m,k} = \frac{\omega_0}{4\pi} \left( \frac{|m - \beta k - \ell^*|}{L} - \frac{2\Omega}{\omega_0} \right). \quad (2.81)$$

Já para o ponto quântico, segue que

$$I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell^* \neq 0} = \begin{cases} +\frac{\omega_0}{4\pi} - \frac{2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell^* > 0, \\ -\frac{\omega_0}{4\pi} - \frac{2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell^* < 0. \end{cases} \quad (2.82)$$

e que

$$I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell^*=0} = -\frac{2\Omega}{4\pi}. \quad (2.83)$$



As equações (2.81), (2.82) e (2.83) nos mostram que a rotação do sistema é suficiente para induzir uma corrente de spin nessas estruturas quânticas estudadas. Também podemos observar que o sentido dessas correntes é sempre oposto ao sentido da rotação. Esses resultados também podem ser obtidos se considerarmos um regime de altas rotações ( $\Omega \gg \omega_{AC}$ ).

### 2.2.4 Magnetização

Vamos agora obter uma expressão análoga para a magnetização de partículas neutras confinadas em um anel quântico girante e analisar sua relação com a corrente persistente de spin (2.77).

Para o nosso sistema, obtemos a magnetização tomando a derivada do espectro de energia para o dipolo magnético (2.66) com relação ao campo magnético efetivo de Aharonov-Casher (2.11):

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = - \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{n,m,k}}{\partial B_{AC}} \right|_N, \quad (2.84)$$

onde  $\mathcal{E}_{n,m,k}$  é o autovalor de energia do estado  $(n, m, k)$ .

Como o campo magnético  $\mathbf{B}_{AC}$  e a frequência  $\omega_{AC}$  de Aharonov-Casher está interrelacionadas, a magnetização para o estado  $(n, m, k)$  é obtida assim:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = - \frac{1}{m^*} \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{n,m,k}}{\partial \omega_{AC}} \right|_N. \quad (2.85)$$

A magnetização total é obtida através da soma

$$\mathcal{M} = \sum_{n,m,k} \mathcal{M}_{n,m,k}, \quad (2.86)$$

sobre todos os estados ocupados. Por mera força de expressão, em algumas situações utilizaremos momento magnético e magnetização como sinônimos.

Substituindo o espectro de energia (2.66) na equação (2.85), segue que o momento magnético para o nosso sistema é dado por:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = - \frac{1}{m^*} \left[ \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \left( 1 + 2 \frac{\Omega}{\omega_{AC}} \right) \frac{\omega_{AC}}{\omega} - \frac{1}{2} (m - \beta k - \ell^*) + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.87)$$

Vale a pena notar que podemos representar a magnetização em termos da corrente persistente (2.77). Para tanto, definindo o raio efetivo em termos do comprimento magnético  $\lambda_0$

$$r_{n,m,k} = (2L)^{1/2} \lambda_0, \quad (2.88)$$

ficamos aptos a relacionar a o momento magnético e a corrente através da seguinte equação:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = \pi r_{n,m,k}^2 I_{n,m,k} - \frac{1}{m^*} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\omega_{AC}}{\omega} + 2 \frac{\Omega}{\omega} \right) + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.89)$$

Podemos ainda expressar a magnetização (3.89) da seguinte forma:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = M_{n,m,k}^{CL} + M_{n,m,k}^{DS} + M_{n,m,k}^{DSR}, \quad (2.90)$$

onde

$$M_{n,m,k}^{CL} = \pi r_{n,m,k}^2 I_{n,m,k} \quad (2.91)$$

é a contribuição semelhante a de um momento de dipolo de uma espira circular [55] de raio  $r_{n,m,k}$  percorrida por uma corrente  $I_{n,m,k}$ . É nesse termo que vemos a dependência da magnetização com relação ao defeito, uma vez que a corrente persistente (2.77) depende explicitamente do parâmetro  $\beta$ .

O termo

$$M_{n,m,k}^{DS} = -\frac{1}{m^*} \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\omega_{AC}}{\omega} - \frac{1}{2m^*} \quad (2.92)$$

é o termo de shift diamagnético associado com a frequência de Aharonov-Casher e com a frequência  $\omega$  característica desse sistema. Vale ressaltar que a equação (2.92) apresenta a mesma forma funcional da (1.89), mostrando o estreito paralelo entre as propriedades de partículas neutras e carregadas. Finalmente, a terceira contribuição, dada por

$$M_{n,m,k}^{DSR} = -2 \frac{1}{m^*} \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\Omega}{\omega}, \quad (2.93)$$

representa uma espécie de deslocamento diamagnético, só que sua origem não é magnética, mas sim puramente não-inercial.

Mais uma vez, é notório que o efeito não-inercial da rotação do sistema de referência desempenha um papel muito importante sobre as propriedades físicas do sistema quântico aqui adota. Como o termo (2.93) depende diretamente da rotação, mesmo que as outras contribuições fossem desconsideradas, efeitos únicos associados com a rotação são observados.

## 2.3 Considerações Finais

Neste capítulo, nós estudamos como efeitos não-inerciais afetam a dinâmica quântica de um dipolo magnético confinado pelo potencial de um anel quântico bidimensional.

Também investigamos quais as contribuições que a torção associada com uma deslocação tipo-hélice traz para propriedades físicas do sistema. A equação de Schrödinger foi resolvida no espaço distorcido pela deslocação e também num espaço plano. Comparando os dois resultados, constatamos que a contribuição do defeito entra como um fluxo de torção.

Ao resolvermos a equação de Schrödinger, obtivemos o espectro de energia para o dipolo magnético que apresenta uma quantização análoga a de Landau. Mostramos que a presença do defeito topológico e da rotação influenciam o níveis de energia. Podemos dizer

que a contribuição mais importante é da rotação, pois ela introduz na dinâmica quântica da partícula efeitos antes associados a campos magnéticos.

De posse do espectro de energia, obtivemos expressões análogas para a corrente persistente e para a magnetização. Essas propriedades também são fortemente influenciadas pela rotação.



### 3 Efeitos Não-Inerciais sobre a Dinâmica Quântica de um Dipolo Elétrico Permanente

Neste capítulo, apresentamos um estudo inédito sobre a dinâmica quântica de uma partícula neutra, com momento de dipolo elétrico permanente, confinada em um anel quântico girante. Será mostrado que os efeitos não-inerciais associados com a rotação do anel girante desempenham um papel muito importante sobre a dinâmica da partícula. Além da rotação, também investigaremos como a presença de um defeito topológico pode alterar as propriedades físicas desse sistema. Os resultados apresentados neste capítulo estão sob fase de submissão e serão publicados em breve, conforme a referência [49].

#### 3.1 Introdução

As analogias entre partículas neutras e carregadas não pararam com o trabalho proposto por Aharonov e Casher [56]. Dois trabalhos contemporâneos, publicados na década de 90, propuseram a existência de uma fase topológica para um dipolo elétrico que interage com um campo magnético gerado por uma linha de monopolos magnéticos. O primeiro trabalho foi publicado em 1993 por He e McKeller [67]. Além de obterem a fase para o dipolo magnético, He McKeller sugerem que essa fase é dual à fase de Aharonov-Casher [56]. No ano seguinte, Wilkens [68] mostrou que essa nova fase surge da interação de Röttinger que acopla o dipolo elétrico com o campo magnético. Ele também sugere que essa fase pode ser observada em um interferômetro atômico ou molecular.

O acoplamento entre o dipolo e o campo é dado pelo potencial vetor de He-McKellar-Wilkens:

$$\mathbf{A}_{HMW} = -\mathbf{d} \times \mathbf{B}, \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{B}$  são respectivamente o momento de dipolo elétrico da partícula neutra e o campo magnético.

Assim como no caso para o dipolo magnético, deve haver um arranjo específico entre a partícula neutra e o campo magnético a fim de que o efeito He-McKellar-Wilkens seja observado.

Uma possível configuração é considerar o momento de dipolo elétrico da partícula neutra orientado ao longo do eixo  $z$  e um campo magnético

$$\mathbf{B} = \left( \frac{\lambda_m}{2\pi\rho} \right) \hat{\rho} \quad (3.2)$$

gerado por uma linha de monopolos magnéticos [ver figura (11)]. Wilkens mostra em seu

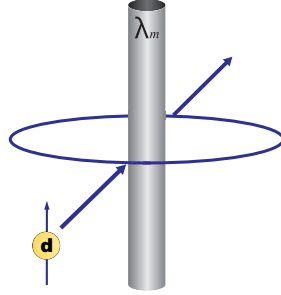


Figura 11 – Ilustração do efeito He-McKellar-Wilkens. Partícula neutra com momento de dipolo elétrico permanente  $\mathbf{d}$  interagindo com o campo elétrico criado por uma distribuição linear monopolos magnéticos.

trabalho que essa configuração garanta que a partícula neutra esteja livre da ação de forças. Sendo assim, o potencial vetor de He-McKellar-Wilkens fica assim:

$$\mathbf{A}_{HMW} = - \left( \frac{d \lambda_m}{2\pi\rho} \right) \hat{\phi}. \quad (3.3)$$

A fase associada ao efeito He-McKellar-Wilkens é, portanto, dada por:

$$\Delta g = \oint_C \mathbf{A}_{HMW} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \oint_C \left( \frac{d \lambda_m}{2\pi\rho} \right) (\rho d\phi) = -d \lambda_m. \quad (3.4)$$

Como podemos perceber, o incremento na fase da função de onda da partícula neutra no caso do efeito He-McKellar-Wilkens é proporcional ao seu momento de dipolo elétrico e a densidade linear de cargas elétricas.

Também não podemos esquecer da quantização análoga a de Landau para o dipolo elétrico. Ribeiro et al. [59] estenderam as ideias de Ericsson e Sjöqvist para o dipolo elétrico interagindo com uma configuração não trivial de campo magnético e obtiveram o seguinte espectro de energia:

$$\mathcal{E}_{n,m} = \left( n + \frac{|m|}{2} + \frac{\sigma}{2} (m - 1) + \frac{1}{2} \right) \omega_{HMW}, \quad (3.5)$$

onde  $\sigma = \pm 1$  representa o sentido de revolução do dipolo e

$$\omega_{HMW} = \frac{d \lambda_m}{m^*}. \quad (3.6)$$

é a frequência de He-McKellar-Wilkens.

## 3.2 Partícula Neutra com Momento de Dipolo Elétrico Permanente Confinada em um Anel Quântico sob Rotação

Nesta seção, estudaremos a dinâmica quântica de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico permanente confinada pelo potencial de um anel quântico girante. Também investigaremos análogos para corrente persistente e magnetização.

No limite não-relativístico, o Hamiltoniano<sup>1</sup> que descreve a dinâmica quântica de um átomo neutro (de massa  $m^*$  e momento de dipolo elétrico permanente  $\mathbf{d}$ ) que interage com um campo magnético  $\mathbf{B}$  é dado por [58]:

$$H = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{HMW})^2 - \frac{d}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{B}, \quad (3.7)$$

onde  $\mathbf{A}_{HMW}$  é o potencial vetor de He-McKellar-Winkens que, por sua vez, é dado por

$$\mathbf{A}_{HMW} = -d \mathbf{n} \times \mathbf{B}, \quad (3.8)$$

onde  $d$  e  $\mathbf{n}$  são respectivamente o módulo e a direção do momento de dipolo elétrico.

Considerando que o momento de dipolo esteja orientado na direção  $z$  e adotando a seguinte configuração para o campo magnético:

$$\mathbf{B} = \frac{\lambda_m}{2} \rho \hat{\rho}, \quad (3.9)$$

onde  $\lambda_m$  representa uma densidade linear de cargas magnéticas, segue então que o potencial vetor de He-McKellar-Wilkens fica assim:

$$\mathbf{A}_{HMW} = - \left( \frac{d\lambda_m}{2} \rho \right) \hat{\phi}. \quad (3.10)$$

Associado ao potencial vetor (3.10), temos o seguinte campo magnético efetivo

$$\mathbf{B}_{HMW} = - \left( d \lambda_m \right) \hat{z}, \quad (3.11)$$

conhecido como o campo magnético de He-McKellar-Wilkens. Esse termo é quem garante que a partícula neutra tenha uma quantização de energia análoga à quantização de Landau para uma partícula carregada [52].

Além da quantização de Landau, estamos interessados em investigar efeitos de correntes de spin para partículas neutras. Para tanto, devemos ter um campo magnético efetivo com a mesma forma funcional para partículas carregadas [conf. equação (1.11)], isto é,

$$\mathbf{B}_{ef} = \left[ B_{HMW} + \Phi_{HMW} \delta^2(\rho) \right] \hat{z}, \quad (3.12)$$

---

<sup>1</sup> Como estamos restringindo nossa análise ao limite não-relativístico, a contribuição do termo  $\frac{d^2 B^2}{2m^* c^2}$  presente na descrição de Anandan [60, 61] é muito pequena e, por isso, será negligenciada.

onde  $\delta^2(\rho)$  é a função delta de Dirac em duas dimensões e  $\Phi_{AC} = \ell \phi_{AC}$  é o fluxo Aharonov-Casher associado com a fase geométrica de Aharonov-Casher [62] e  $\ell$  é um número inteiro. O potencial vetor que nos fornece o campo magnético efetivo (3.12) é dado por

$$\mathbf{A}_{\Phi_{HMW}} = \left( -\frac{d\lambda_m}{2}\rho + \frac{\Phi_{HMW}}{2\pi} \frac{1}{\rho} \right) \hat{\phi}, \quad (3.13)$$

onde vemos claramente que o primeiro termo é exatamente o acoplamento de Aharonov-Casher, enquanto o segundo é responsável pela criação fluxo Aharonov-Casher.

Desse modo, o Hamiltoniano que nos possibilita estudar tanto efeitos de quantização de Landau, assim como de correntes de spin para partículas neutras é dado por:

$$H = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{HMW}})^2 - \frac{d}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{B}. \quad (3.14)$$

Introduzindo agora a contribuição de um anel quântico, a equação (3.14) fica assim:

$$H = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{HMW}})^2 - \frac{d}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{B} + V(\rho), \quad (3.15)$$

onde  $V(\rho)$  é o potencial de confinamento de um anel quântico, conhecido como potencial de Tan-Inkson, que é dado por

$$V(\rho) = \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0, \quad (3.16)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são parâmetros constantes e  $V_0 = 2\sqrt{a_1 a_2}$ .

Vamos agora introduzir a contribuição da rotação para a dinâmica quântica da partícula. O Hamiltoniano  $H$  dado na equação (3.15) é definido em um sistema de referência inercial. Definiremos agora um Hamiltoniano  $H_\Omega$  em um sistema de referência que gira com velocidade angular constante  $\boldsymbol{\Omega}$  em torno de um eixo fixo. Esses dois Hamiltonianos se relacionam da seguinte forma:

$$H_\Omega = H - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L}, \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{L}$  é o momento angular da partícula.

Substituindo a equação (3.15) na equação (3.17), temos que

$$H_\Omega = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{HMW}})^2 - \frac{d}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{B} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L} + V(\rho). \quad (3.18)$$

e lembrando que  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  e tendo em mente que, para o nosso caso, o vetor  $\mathbf{r}$  serve para localizar um ponto fixo sobre o anel, segue que

$$\begin{aligned} H_\Omega &= \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{HMW}})^2 + \frac{d}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{B} - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + V(\rho) \\ &= \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{HMW}})^2 + \frac{d}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + V(\rho). \end{aligned} \quad (3.19)$$



Pelo fato de considerarmos uma rotação  $\mathbf{\Omega}$  constante, podemos reescrever a equação anterior de uma forma mais conveniente:

$$H_{\Omega} = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{HMW}} - m^* (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}))^2 - \frac{1}{2} m^* (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - \frac{d}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{B} + V(\rho). \quad (3.20)$$

Como podemos notar, o termo cinético do Hamiltoniano (3.20) possui, além do acoplamento mínimo com o potencial vetor de He-McKellar-Wilkens, um termo extra associado com a rotação do sistema de referência. Essa termo extra sugere que a força de Coriolis presente no sistema de referência não-inercial faz um papel análogo ao da força de Lorentz que atua sobre uma partícula carregada em um campo magnético uniforme. Com isso em mente, é válido pensar que o termo  $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$  dentro do termo cinético se comporta como um acoplamento mínimo e pode ser entendido como um potencial vetor efetivo associado ao efeito não-inercial de rotação, isto é,

$$\mathbf{A}_{\Omega} \equiv \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (3.21)$$

Considerando um ponto fixo sobre o anel localizado pelo vetor  $\mathbf{r} = (\rho, 0, 0)$  e que esse ponto descreve uma rotação  $\mathbf{\Omega} = \Omega \hat{z}$  em torno do eixo  $\hat{z}$ , o potencial vetor efetivo  $\mathbf{A}_{\Omega}$  associado ao efeito não-inercial de rotação fica assim:

$$\mathbf{A}_{\Omega} = \Omega \rho \hat{\phi}. \quad (3.22)$$

A equação (3.20) é, portanto, o Hamiltoniano que descreve a dinâmica quântica de uma partícula neutra, confinada em um anel quântico girante. Iremos agora proceder com a resolução da equação de Schrödinger associada a esse Hamiltoniano em duas situações distintas: primeiramente, obteremos os autovalores de energia e as autofunções considerando um espaço plano e logo em seguida, a equação de Schrödinger será resolvida no background de uma deslocação tipo-hélice.

### 3.2.1 Anel Quântico sob Rotação em um Espaço Plano

Vamos agora resolver a equação de Schrödinger para o sistema descrito pelo hamiltoniano (3.20) para um espaço euclidiano.

Pelo fato de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}_{\Omega}$  apresentarem uma contribuição não nula apenas na direção azimutal, segue que o Hamiltoniano (3.20) escrito em coordenadas cilíndricas, num espaço plano fica assim:

$$H_{\Omega} = -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right) - i(A_{\Phi_{HMW}})_{\phi} - im^*(A_{\Omega})_{\phi} \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} m^* (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - \frac{d}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{B} + V(\rho). \quad (3.23)$$

Agora, iremos proceder com a resolução da equação de Schrödinger associada ao Hamiltoniano (3.23). Substituindo as contribuições do campo elétrico (3.9), do potencial vetor de Aharonov-Casher modificado (3.13), da rotação (3.22) e do potencial de Tan-Inkson (3.16) na equação (3.23), tal Hamiltoniano assume a seguinte forma

$$H_\Omega = -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\Phi_{HMW}}{2\pi} \right) - \frac{im^*}{2} \left( 2\Omega - \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \rho \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} m^* \Omega^2 \rho^2 - \frac{d\lambda_m}{m^*} + \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0. \quad (3.24)$$

A equação de Schrödinger independente do tempo associada ao Hamiltoniano (3.24) é dada por

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\Phi_{HMW}}{2\pi} \right)^2 - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right. \\ & \cdot \left( \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right)^2 - 4\Omega \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \right) \rho^2 - im^* \left( 2\Omega - \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\Phi_{HMW}}{2\pi} \right) - \\ & \left. - 2m^* \left( -\frac{d\lambda_m}{m^*} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi + \left[ \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0 \right] \Psi = \varepsilon \Psi. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Depois de algumas manipulações matemáticas, temos que

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\Phi_{HMW}}{2\pi} \right)^2 - 2m^* a_1 \right] - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right. \\ & \cdot \left( \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right)^2 - 4\Omega \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right) \rho^2 - im^* \left( 2\Omega - \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \cdot \\ & \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\Phi_{HMW}}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} + \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \left. \right] \Psi = 0. \quad (3.26) \end{aligned}$$

Lembrando que  $\Phi_{HMW} = \ell \phi_{HMW}$ , a equação anterior fica assim:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right)^2 - 2m^* a_1 \right] - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right. \\ & \cdot \left( \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right)^2 - 4\Omega \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right) \rho^2 - im^* \left( 2\Omega - \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \cdot \\ & \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} + \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \left. \right] \Psi = 0. \quad (3.27) \end{aligned}$$

Devido a simetria do problema, utilizamos o seguinte anzats

$$\Psi = A R(\rho) e^{im\phi} e^{ikz}, \quad (3.28)$$

onde  $A$  é a constante de normalização. Depois de algumas transformações, obtemos a seguinte equação radial

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' - \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( m - \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right)^2 + 2m^* a_1 \right] R - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \cdot \left[ \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right)^2 - 4\Omega \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right] \rho^2 R + \left[ m^* \left( 2\Omega - \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \left( m - \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right) - k^2 + 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} + \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \right] R = 0. \quad (3.29)$$

Introduzindo as seguintes definições

$$\begin{aligned} \omega_{HMW}^2 &= \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right)^2; \\ \omega_0^2 &= \frac{8a_2}{m^*}; \\ \omega^2 &= \omega_{HMW}^2 - 4\Omega\omega_{HMW} + \omega_0^2; \\ L^2 &= \left( m - \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right)^2 + 2m^* a_1; \\ \gamma' &= 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} + \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) + m^* \omega^* \left( m - \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right) - k^2; \\ \omega^* &= 2\Omega - \omega_{HMW}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

a equação radial (3.29) assume uma forma bem conhecida:

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left[ -\frac{m^{*2}\omega^2}{4}\rho^2 + \gamma' - \frac{L^2}{\rho^2} \right] R = 0. \quad (3.31)$$

Procedendo com a seguinte mudança de variáveis

$$\xi = \frac{m^*\omega}{2}\rho^2 \quad (3.32)$$

podemos reescrever a equação (3.31) assim:

$$\xi \ddot{R} + \dot{R} + \left[ -\frac{\xi}{4} + \gamma - \frac{L^2}{4\xi} \right] R = 0, \quad (3.33)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{2m^*\omega} \left[ 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} + \frac{\omega_{HMW}}{2} \right) + m^* \omega^* \left( m - \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right) - k^2 \right]. \quad (3.34)$$

Analizando o comportamento da equação (3.33) nos limites assintóticos, isto é, para  $\xi \rightarrow 0$  and para  $\xi \rightarrow \infty$  [conf. (A.1)], podemos escrever uma solução para a equação (3.33) na seguinte forma:

$$R(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{|L|/2} \zeta(\xi), \quad (3.35)$$

Substituindo então a equação (3.35) na equação (3.33), verifica-se facilmente que a função  $\zeta(\xi)$  obedece à seguinte equação diferencial:

$$\xi \ddot{\zeta} + (|L| + 1 - \xi) \dot{\zeta} - \left[ \frac{|L| + 1}{2} - \gamma \right] \zeta = 0, \quad (3.36)$$

onde (3.36) é a equação hipergeométrica, cuja solução é a função hipergeométrica confluyente:

$$\zeta(\xi) = F \left[ - \left( \gamma - \frac{|L| + 1}{2} \right); |L| + 1; \xi \right]. \quad (3.37)$$

A quantização da energia vem do fato de que a função hipergeométrica deve obedecer a uma condição de convergência, condição esta que é satisfeita quando o primeiro parâmetro da função hipergeométrica (3.37) for igual a um número inteiro negativo, isto é:

$$- \left( \gamma - \frac{|L| + 1}{2} \right) = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.38)$$

Substituindo a equação (3.34) na equação (3.38), segue que

$$\begin{aligned} - \left( \frac{1}{2m^*\omega} \left[ 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} + \frac{\omega_{HMW}}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + m^*\omega^* \left( m - \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right) - k^2 \right] - \frac{|L| + 1}{2} \right) = -n \end{aligned} \quad (3.39)$$

A partir daí, facilmente obtemos o seguinte espectro de energia:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2} (m - \ell^*) \omega^* - \frac{1}{2} \omega_{HMW} - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{k^2}{2m^*}, \quad (3.40)$$

onde

$$\ell^* = \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \quad (3.41)$$

foi introduzido para simplificar a notação.

Os números quânticos  $n$ ,  $m$  e  $k$  caracterizam respectivamente o movimento da partícula na direção radial, o momento angular e o movimento da partícula na direção  $z$ . Devido a condição de quantização imposta pela função hipergeométrica, o número quântico  $n$  deve ser um número inteiro maior ou igual a zero. Como a função de onda apresenta condição de contorno periódica na direção azimutal, o número quântico  $m$  pode assumir qualquer valor inteiro. Por fim, o número quântico  $k$  pode assumir qualquer valor de  $-\infty$  a  $+\infty$ , pelo fato de o movimento da partícula não ser quantizado nessa direção.

Vemos claramente na equação (3.40) que a única contribuição do fluxo Aharonov-Bohm de alterar o número quântico  $m$  para  $(m - \ell)$ . Assim como nos casos anteriores, os níveis de energia são caracterizados por três frequências:  $\omega$ ,  $\omega^*$  e  $\omega_0$ . A primeira delas depende do da frequência de He-McKellar-Wilkens, da do parâmetro  $a_2$  que define a frequência do potencial de Tan-Inkson e também da velocidade angular  $\Omega$ . A segunda

frequência  $\omega^*$  depende tanto da frequência de He-McKellar-Wilkens  $\omega_{HMW}$  quanto da rotação  $\Omega$ . Finalmente, a terceira frequência  $\omega_0$  é a frequência característica do potencial de confinamento de Tan-Inkson que, por sua vez, depende apenas do parâmetro  $a_2$ .

Considerando o limite para o qual o sistema de referência não gira ( $\Omega = 0$ ), não existe nenhum fluxo He-McKellar-Wilkens atravessando o centro do anel ( $\phi_{HMW} = 0$ ) e o confinamento é desconsiderado ( $a_1 = a_2 = 0$ ), a equação (3.40) assume a seguinte forma:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|m|}{2} + \frac{1}{2}(m-1) + \frac{1}{2} \right) \omega_{HMW} + \frac{k^2}{2m^*}, \quad (m \geq \ell), \quad (3.42)$$

isto é, recuperamos o resultado obtido por [59], apresentado na equação (4.6).

Vamos agora obter as autofunções de energia. Substituindo a equação (3.63) na (3.35) e voltando para a variável  $\rho$ , temos que

$$R(\rho) = \left( \frac{1}{2^{|L|}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho}{\lambda_0} \right)^{|L|} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right]. \quad (3.43)$$

Reunindo agora as equações (3.28) e (3.43), a função de onda não normalizada para o nosso problema fica assim:

$$\Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = A \left( \frac{1}{2^{|L|}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho}{\lambda_0} \right)^{|L|} e^{im\phi} e^{ikz} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right]. \quad (3.44)$$

Da equação (22) temos que

$$A = \frac{1}{\lambda_0} \left[ \frac{(n + |L|)!}{2^n n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2}, \quad (3.45)$$

o que, finalmente, nos leva às seguintes autofunções normalizadas:

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\lambda_0^{|L|+1}} \left[ \frac{\Gamma(n + |L| + 1)}{2^{|L|+1} n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2} \\ \cdot e^{im\phi} e^{ikz} \rho^{|L|} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right], \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{1}{m^* \omega}} \quad (3.47)$$

é o comprimento magnético renormalizado pela interação de He-McKellar-Wilkens, pelo confinamento do anel e pelo efeito não-inercial. O comprimento magnético  $\lambda_0$  representa a amplitude de oscilação e também serve como um fator de escala, dando as dimensões típicas do sistema.

### 3.2.2 Anel Quântico sob Rotação no Espaço de uma Deslocação Tipo-Hélice

Nesta seção, estudaremos a dinâmica quântica de uma partícula neutra dotada de um momento de dipolo elétrico e confinada por um anel quântico girante. Além da rotação do sistema de referência, a partícula encontra-se na presença de uma deslocação tipo-hélice.

A métrica que descreve um espaço distorcido pela presença de uma deslocação tipo-hélice é dada por:

$$ds^2 = d\rho^2 + (dz + \beta d\phi)^2 + \rho^2 d\phi^2, \quad (3.48)$$

onde  $\rho > 0$ ,  $0 < \phi < 2\pi$  e  $-\infty < z < \infty$ . Na métrica (3.48), a única componente não nula do vetor de Burges é a componente na direção  $\hat{z}$ , isto é,  $b^z = 2\pi\beta$ .

Pelo fato de  $\mathbf{A}_{\Phi_{AC}}$  e  $\mathbf{A}_{\Omega}$  apresentarem uma contribuição não nula apenas na direção azimutal, segue que o Hamiltoniano (3.20) escrito no background da métrica (3.48) fica assim:

$$\begin{aligned} H_{\Omega} = & -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right) - i(A_{\Phi_{HMW}})_{\phi} - im^*(A_{\Omega})_{\phi} \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \\ & - \frac{1}{2} m^* (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - \frac{d}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{B} + V(\rho). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Agora, iremos proceder com a resolução da equação de Schrödinger associada ao Hamiltoniano (3.49). Substituindo as contribuições do campo elétrico (3.9), do potencial vetor de He-McKellar-Wilkins modificado (3.13), da rotação (3.22) e do potencial de Tan-Inkson (3.16) na equação (3.49), tal Hamiltoniano assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} H_{\Omega} = & -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{HMW}}{2\pi} \right) - \frac{im^*}{2} \left( 2\Omega - \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \rho \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \\ & - \frac{1}{2} m^* \Omega^2 \rho^2 - \frac{d\lambda_m}{m^*} + \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

A equação de Schrödinger independente do tempo associada ao Hamiltoniano (3.50) é dada por

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{HMW}}{2\pi} \right)^2 - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right. \\ & \cdot \left( \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right)^2 - 4\Omega \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \right) \rho^2 - im^* \left( 2\Omega - \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{HMW}}{2\pi} \right) - \\ & \left. - 2m^* \left( -\frac{d\lambda_m}{m^*} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi + \left[ \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0 \right] \Psi = \mathcal{E} \Psi. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Depois de algumas manipulações matemáticas, temos que

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{HMW}}{2\pi} \right)^2 - 2m^* a_1 \right] - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right. \\ & \quad \cdot \left( \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right)^2 - 4\Omega \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right) \rho^2 - im^* \left( 2\Omega - \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \\ & \quad \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{HMW}}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} + \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \Big] \Psi = 0. \quad (3.52) \end{aligned}$$

Lembrando que  $\Phi_{HMW} = \ell \phi_{HMW}$ , a equação anterior fica assim:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right)^2 - 2m^* a_1 \right] - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right. \\ & \quad \cdot \left( \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right)^2 - 4\Omega \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right) \rho^2 - im^* \left( 2\Omega - \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \\ & \quad \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} + \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \Big] \Psi = 0. \quad (3.53) \end{aligned}$$

Devido a simetria do problema, utilizamos o seguinte anzats

$$\Psi = A R(\rho) e^{im\phi} e^{ikz}, \quad (3.54)$$

onde  $A$  é a constante de normalização. Depois de algumas transformações, obtemos a seguinte equação radial

$$\begin{aligned} & R'' + \frac{1}{\rho} R' - \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right)^2 + 2m^* a_1 \right] R - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \\ & \cdot \left[ \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right)^2 - 4\Omega \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right] \rho^2 R + \left[ m^* \left( 2\Omega - \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right) - k^2 + \right. \\ & \quad \left. + 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} + \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) \right] R = 0. \quad (3.55) \end{aligned}$$

Introduzindo as seguintes definições

$$\begin{aligned} \omega_{HMW}^2 &= \left( \frac{d\lambda_m}{m^*} \right)^2; \\ \omega_0^2 &= \frac{8a_2}{m^*}; \\ \omega^2 &= \omega_{HMW}^2 - 4\Omega \omega_{HMW} + \omega_0^2; \\ L^2 &= \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right)^2 + 2m^* a_1; \\ \gamma' &= 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} + \frac{d\lambda_m}{m^*} \right) + m^* \omega^* \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right) - k^2; \\ \omega^* &= 2\Omega - \omega_{HMW}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

a equação radial (3.55) assume uma forma bem conhecida:

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' + \left[ -\frac{m^*\omega^2}{4}\rho^2 + \gamma' - \frac{L^2}{\rho^2} \right] R = 0. \quad (3.57)$$

Procedendo com a seguinte mudança de variáveis

$$\xi = \frac{m^*\omega}{2}\rho^2 \quad (3.58)$$

podemos reescrever a equação (3.57) assim:

$$\xi\ddot{R} + \dot{R} + \left[ -\frac{\xi}{4} + \gamma - \frac{L^2}{4\xi} \right] R = 0, \quad (3.59)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{2m^*\omega} \left[ 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} + \frac{\omega_{HMW}}{2} \right) + m^*\omega^* \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right) - k^2 \right]. \quad (3.60)$$

Analizando o comportamento da equação (3.59) nos limites assintóticos, isto é, para  $\xi \rightarrow 0$  and para  $\xi \rightarrow \infty$  [conf. (A.1)], podemos escrever uma solução para a equação (3.59) na seguinte forma:

$$R(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{|L|/2} \zeta(\xi), \quad (3.61)$$

Substituindo então a equação (3.61) na equação (3.59), verifica-se facilmente que a função  $\zeta(\xi)$  obedece à seguinte equação diferencial:

$$\xi\ddot{\zeta} + (|L| + 1 - \xi)\dot{\zeta} - \left[ \frac{|L| + 1}{2} - \gamma \right] \zeta = 0, \quad (3.62)$$

onde (3.62) é a equação hipergeométrica, cuja solução é a função hipergeométrica confluyente:

$$\zeta(\xi) = F \left[ - \left( \gamma - \frac{|L| + 1}{2} \right); |L| + 1; \xi \right]. \quad (3.63)$$

A quantização da energia vem do fato de que a função hipergeométrica deve obedecer a uma condição de convergência, condição esta que é satisfeita quando o primeiro parâmetro da função hipergeométrica (3.63) for igual a um número inteiro negativo, isto é:

$$- \left( \gamma - \frac{|L| + 1}{2} \right) = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.64)$$

Substituindo a equação (3.60) na equação (3.64), segue que

$$- \left( \frac{1}{2m^*\omega} \left[ 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} + \frac{\omega_{HMW}}{2} \right) + m^*\omega^* \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{HMW}}{2\pi} \right) - k^2 \right] - \frac{|L| + 1}{2} \right) = -n \quad (3.65)$$



A partir daí, facilmente obtemos o seguinte espectro de energia:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2} (m - \beta k - \ell^*) \omega^* - \frac{1}{2} \omega_{HMW} - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{k^2}{2m^*}, \quad (3.66)$$

onde

$$\ell^* = \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \quad (3.67)$$

foi introduzido para simplificar a notação.

Os números quânticos  $n$ ,  $m$  e  $k$  caracterizam respectivamente o movimento da partícula na direção radial, o momento angular e o movimento da partícula na direção  $z$ . Devido a condição de quantização imposta pela função hipergeométrica, o número quântico  $n$  deve ser um número inteiro maior ou igual a zero. Como a função de onda apresenta condição de contorno periódica na direção azimutal, o número quântico  $m$  pode assumir qualquer valor inteiro. Por fim, o número quântico  $k$  pode assumir qualquer valor de  $-\infty$  a  $+\infty$ , pelo fato de o movimento da partícula não ser quantizado nessa direção.

Comparando as equações (3.40) e (3.66), vemos claramente que a única contribuição da presença do defeito topológico sobre os autovalores de energia é de, assim como o fluxo Aharonov-Bohm, alterar o número quântico  $m$  para  $(m - \beta k - \ell)$ . É fácil perceber que podemos obter o espectro de energia para o caso do espaço plano (3.40) a partir do espectro de energia obtido no background da deslocação tipo-hélice (3.66); basta tomar  $\beta = 0$ . O defeito não exerce nenhuma influência sobre as três frequências que caracterizam o espectro de energia (3.66). Sendo assim, as frequências  $\omega$ ,  $\omega^*$  e  $\omega_0$  são as mesmas que caracterizam o movimento do dipolo elétrico no caso do espaço euclidiano (3.40).

Como vimos nos capítulos anteriores, a rotação do sistema de referência é, por si só, responsável por efeitos muito interessantes. Desconsiderando as contribuições da interação de He-McKellar-Wilkins ( $\omega_{HMW} \rightarrow 0$ ), segue que:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega_0 - (m - \beta k - \ell^*) \Omega - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{k^2}{2m^*}. \quad (3.68)$$

Como podemos perceber na equação (3.68), o confinamento proveniente do potencial de Tan-Inkson e o efeito não-inercial associado com a rotação do sistema de referência são suficientes para que a partícula ainda apresente uma quantização análoga a de Landau. Note que se fizermos  $\Omega \rightarrow 0$  na equação (3.68), percebemos que o confinamento proveniente do potencial de Tan-Inkson ainda nos garante uma quantização análoga a de Landau.

Vamos agora obter as autofunções de energia. Substituindo a equação (3.63) na (3.61) e voltando para a variável  $\rho$ , temos que

$$R(\rho) = \left( \frac{1}{2^{|L|}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho}{\lambda_0} \right)^{|L|} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right]. \quad (3.69)$$

Reunindo agora as equações (3.54) e (3.69), a função de onda não normalizada para o nosso problema fica assim:

$$\Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = A \left( \frac{1}{2^{|L|}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho}{\lambda_0} \right)^{|L|} e^{im\phi} e^{ikz} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right]. \quad (3.70)$$

Da equação (22) temos que

$$A = \frac{1}{\lambda_0} \left[ \frac{(n + |L|)!}{2n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2}, \quad (3.71)$$

o que, finalmente, nos leva às seguintes autofunções normalizadas:

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\lambda_0^{|L|+1}} \left[ \frac{\Gamma(n + |L| + 1)}{2^{|L|+1} n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2} \\ \cdot e^{im\phi} e^{ikz} \rho^{|L|} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right], \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{1}{m^* \omega}} \quad (3.73)$$

é o comprimento magnético renormalizado pela interação de He-McKellar-Wilkins, pelo confinamento do anel e pelo efeito não-inercial. O comprimento magnético  $\lambda_0$  representa a amplitude de oscilação e também serve como um fator de escala, dando as dimensões típicas do sistema.

### 3.2.3 Corrente Persistente

Vamos agora obter uma expressão análoga para a corrente persistente associada com uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico confinada por um anel quântico girante.

Uma maneira de se obter a corrente carregada por um dado estado eletrônico  $\Psi_{n,m,k}$  é através da seguinte equação:

$$I_{n,m,k} = \int dz \int d\phi \int dr j_{n,m,k}(r, \phi, z), \quad (3.74)$$

onde  $j_{n,m,k}(r, \phi, z)$  é a densidade de corrente para esse estado quântico.

No entanto, já que conhecemos a expressão analítica para o espectro de energia, é mais conveniente calcular  $I_{n,m,k}$  usando a relação Byers-Yang [54]:

$$\begin{aligned} I_{n,m,k} &= -\frac{\partial E_{n,m,k}}{\partial \Phi_{HMW}} \\ &\Downarrow \\ I_{n,m,k} &= -\frac{1}{\phi_{HMW}} \frac{\partial E_{n,m,k}}{\partial \ell}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

lembrando que  $\phi_{HMW}$  é a fase de He-McKellar-Wilkins.

A corrente persistente total é, portanto, a soma das correntes carregadas por todos estados eletrônicos ocupados:

$$I = \sum_{n,m,k} I_{n,m,k}, \quad (3.76)$$

onde devemos ter em mente que a soma em  $k$  na verdade é uma integral, pelo simples fato de  $k$  poder assumir valores contínuos.

Substituindo a equação (3.66) na equação (3.75), segue que a corrente persistente para o nosso sistema é dada por:

$$I_{n,m,k} = \frac{\omega}{4\pi} \left( \frac{|m - \beta k - \ell^*|}{L} - \frac{\omega^*}{\omega} \right), \quad (3.77)$$

lembrando que  $\ell^* = \ell(\phi_{HMW}/2\pi)$ .

Note que a corrente persistente é uma função do fluxo He-McKellar-Wilkins e do vetor de Burgers. Deve-se também observar a dependência da corrente persistente com relação a velocidade de rotação  $\Omega$  através das frequências  $\omega$  e  $\omega^*$ , que dependem implicitamente da rotação.

### 3.2.3.1 Limite para o ponto quântico

Pelo fato de o potencial de Tan-Inkson (3.16) ser um modelo muito versátil, podemos utilizá-lo para descrever diversas estruturas quânticas. Um ponto quântico é modelado por um confinamento parabólico. Sendo assim, fazendo  $a_1 = 0$  na equação (3.16) obtemos que

$$V(\rho) = a_2 \rho^2, \quad (3.78)$$

isto é, a equação (3.78) descreve o potencial de confinamento para um ponto quântico.

Vamos agora obter uma expressão para a corrente persistente de um ponto quântico. Fazendo agora  $a_1 = 0$  na equação (3.77), chegamos à seguinte expressão para a corrente persistente de um ponto quântico:

$$I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell^* \neq 0} = \begin{cases} -\frac{(\omega^* - \omega)}{4\pi} = -\frac{(\omega_{HMW} - \omega)}{4\pi} + \frac{2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell^* > 0, \\ -\frac{(\omega^* + \omega)}{4\pi} = -\frac{(\omega_{HMW} + \omega)}{4\pi} + \frac{2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell^* < 0. \end{cases} \quad (3.79)$$

A expressão (3.79) só é válida para estados em que  $m - \beta k - \ell^* \neq 0$ . Isso se deve ao fato de que a função de onda dos estados com  $m - \beta k - \ell^* = 0$  pode assumir um valor não nulo para  $\rho = 0$ . Nessas condições, a relação de Byers-Yang utilizada para obter a expressão (3.77) não pode mais ser utilizada.

No entanto, uma vez que a equação (3.77) se aplica a todos os estados com  $a_1 \neq 0$ , a corrente transportada em um ponto quântico por um estado com  $m - \beta k - \ell^* = 0$  pode ser obtida tomando o limite:

$$\begin{aligned} I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell^*=0} &= \lim_{a_1 \rightarrow 0^+} \left[ \lim_{(m-\beta k) \rightarrow \ell^*} \frac{\omega}{4\pi} \left( \frac{|m - \beta k - \ell^*|}{L} - \frac{\omega^*}{\omega} \right) \right] \\ &= -\frac{\omega^*}{4\pi} \\ &= -\frac{\omega_{HMW}}{4\pi} + \frac{2\Omega}{4\pi}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Note que se desconsiderarmos na equação (3.80) as contribuições provenientes da rotação e do defeito topológico, isto é, fazendo  $\beta \rightarrow 0$  e  $\Omega \rightarrow 0$ , recuperamos um resultado com a mesma forma funcionado ao resultado obtido em [14] por Avishai e Kohmoto para pontos quânticos na presença de um campo magnético intenso.

Vamos agora analisar o comportamento do anel e do ponto quântico na ausência da interação de He-McKellar-Wilkins. Fazendo  $\omega_{HMW} \rightarrow 0$  nas equações (3.77), (3.79) e (3.80), obtemos para o anel quântico que

$$I_{n,m,k} = \frac{\omega_0}{4\pi} \left( \frac{|m - \beta k - \ell^*|}{L} + \frac{2\Omega}{\omega_0} \right). \quad (3.81)$$

Já para o ponto quântico, segue que

$$I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell^* \neq 0} = \begin{cases} +\frac{\omega_0}{4\pi} + \frac{2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell^* > 0, \\ -\frac{\omega_0}{4\pi} + \frac{2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell^* < 0. \end{cases} \quad (3.82)$$

e que

$$I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell^*=0} = \frac{2\Omega}{4\pi}. \quad (3.83)$$

As equações (3.81), (3.82) e (3.83) nos mostram que a rotação do sistema é suficiente para induzir um efeito análogo de corrente persistente para o dipolo elétrico. Também deve-se observar que, em alguns casos, o sentido dessas correntes é oposto ao sentido da rotação.

### 3.2.4 Magnetização

Vamos agora obter uma expressão análoga para a magnetização de partículas neutras confinadas em um anel quântico girante e analisar sua relação com a corrente persistente de spin (3.77).

Para o nosso sistema, obtemos a magnetização tomando a derivada do espectro de energia para o dipolo elétrico (3.66) com relação ao campo magnético efetivo de He-McKellar-Wilkins (3.11):

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = - \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{n,m,k}}{\partial B_{HMW}} \right|_N, \quad (3.84)$$

onde  $\mathcal{E}_{n,m,k}$  é o autovalor de energia do estado  $(n, m, k)$ .

Como o campo magnético  $B_{HMW}$  e a frequência  $\omega_{WMH}$  de He-McKellar-Wilkins estão interrelacionados, a magnetização para o estado  $(n, m, k)$  é obtida assim:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = - \frac{1}{m^*} \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{n,m,k}}{\partial \omega_{HMW}} \right|_N. \quad (3.85)$$

A magnetização total é obtida através da soma

$$\mathcal{M} = \sum_{n,m,k} \mathcal{M}_{n,m,k}, \quad (3.86)$$

sobre todos os estados ocupados. Por mera força de expressão, em algumas situações utilizaremos momento magnético e magnetização como sinônimos.

Substituindo o espectro de energia (3.66) na equação (3.85), segue que o momento magnético para o nosso sistema é dado por:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = - \frac{1}{m^*} \left[ \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \left( 1 + 2 \frac{\Omega}{\omega_{HMW}} \right) \frac{\omega_{HMW}}{\omega} - \frac{1}{2} (m - \beta k - \ell^*) - \frac{1}{2} \right]. \quad (3.87)$$

Vale a pena notar que podemos representar a magnetização em termos da corrente persistente (3.77). Para tanto, definindo o raio efetivo em termos do comprimento magnético  $\lambda_0$

$$r_{n,m,k} = (2L)^{1/2} \lambda_0, \quad (3.88)$$

ficamos aptos a relacionar a o momento magnético e a corrente através da seguinte equação:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = \pi r_{n,m,k}^2 I_{n,m,k} - \frac{1}{m^*} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\omega_{HMW}}{\omega} + 2 \frac{\Omega}{\omega} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (3.89)$$

Podemos ainda expressar a magnetização (3.89) da seguinte forma:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = M_{n,m,k}^{CL} + M_{n,m,k}^{DS} + M_{n,m,k}^{DSR}, \quad (3.90)$$

onde

$$\mathcal{M}_{n,m,k}^{CL} = \pi r_{n,m,k}^2 I_{n,m,k} \quad (3.91)$$

é a contribuição semelhante a de um momento de dipolo de uma espira circular [55] de raio  $r_{n,m,k}$  percorrida por uma corrente  $I_{n,m,k}$ . É nesse termo que vemos a dependência da

magnetização com relação ao defeito, uma vez que a corrente persistente (3.77) depende explicitamente do parâmetro  $\beta$ .

O termo

$$\mathcal{M}_{n,m,k}^{DS} = -\frac{1}{m^*} \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\omega_{HMW}}{\omega} + \frac{1}{2m^*} \quad (3.92)$$

é o termo de shift diamagnético associado com a frequência de He-McKellar-Wilkins e com a frequência  $\omega$  característica desse sistema. Vale ressaltar que a equação (3.92) apresenta a mesma forma funcional da (1.89), mostrando o estreito paralelo entre as propriedades de partículas neutras e carregadas. Finalmente, a terceira contribuição, dada por

$$\mathcal{M}_{n,m,k}^{DSR} = -2 \frac{1}{m^*} \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\Omega}{\omega}, \quad (3.93)$$

representa uma espécie de deslocamento diamagnético, só que sua origem não é magnética, mas sim puramente não-inercial.

Mais uma vez, é notório que o efeito não-inercial da rotação do sistema de referência desempenha um papel muito importante sobre as propriedades físicas do sistema quântico aqui adotado. Como o termo (3.93) depende diretamente da rotação, mesmo que as outras contribuições fossem desconsideradas, efeitos únicos associados com a rotação são observados.

### 3.3 Considerações Finais

Neste capítulo, nós estudamos como efeitos não-inerciais afetam a dinâmica quântica de uma partícula neutra dotada de dipolo elétrico permanente confinada pelo potencial de um anel quântico bidimensional.

Também investigamos quais as contribuições que a torção associada com uma deslocação tipo-hélice traz para propriedades físicas do sistema. A equação de Schrödinger foi resolvida no espaço distorcido pela deslocação e também num espaço plano. Comparando os dois resultados, constatamos que a contribuição do defeito entra como um fluxo de torção.

Ao resolvermos a equação de Schrödinger, obtivemos o espectro de energia para o dipolo magnético que apresenta uma quantização análoga a de Landau. Mostramos que a presença do defeito topológico e da rotação influenciam o níveis de energia. Podemos dizer que a contribuição mais importante é da rotação, pois ela introduz na dinâmica quântica da partícula efeitos antes associados a campos magnéticos.

De posse do espectro de energia, obtivemos expressões análogas para a corrente persistente e para a magnetização. Essas propriedades também são fortemente influenciadas pela rotação.

## 4 Influência da Rotação na Dinâmica Quântica de uma Partícula Neutra com Momento de Dipolo Elétrico Induzido Confinada em um Anel

Neste capítulo, investigamos como a dinâmica quântica de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido é afetada pela presença de efeitos não-inerciais introduzidos pelo confinamento de um anel quântico girante. Além da rotação, também investigaremos qual a contribuição da torção introduzida pela presença de uma deslocação tipo-hélice. Os resultados apresentados neste capítulo estão sob fase de submissão e serão publicados em breve, conforme a referência [50].

### 4.1 Introdução

Vimos no capítulo anterior que He, McKellar e Wilkens [67, 68] propuseram um análogo ao efeito Aharonov-Casher, mostrando que uma partícula neutra com dipolo elétrico permanente adquire uma fase quântica geométrica ao descrever um circuito fechado em torno de uma distribuição linear de monopolos magnéticos. Embora a contribuição teórica desses dois trabalhos seja válida por sugerir que dipolos elétricos e magnéticos apresentam um comportamento dual quando interagem respectivamente com campos magnéticos e elétricos, a verificação experimental desse efeito fica inviabilizada, pois em ambas propostas se faz necessário a utilização de um campo magnético gerado por uma linha de monopolos magnéticos, os quais (até hoje) não foram verificados experimentalmente.

Uma ótima solução para esse impasse foi proposta por Wei, Han e Wei [69] em 1995. Nesse artigo eles sugerem que uma partícula neutra (que não apresenta um momento de dipolo elétrico permanente) se movendo em uma região permeada por um campo elétrico não uniforme e por um campo magnético uniforme adquire uma fase quântica. Essa fase pode ser atribuída a um efeito Aharonov-Bohm resultante associado com as cargas que constituem a partícula neutra.

A configuração de campos proposta por Wei et al. consiste em submeter a partícula neutra a um campo elétrico radial gerado por uma distribuição linear de cargas,

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\rho}\hat{\rho}, \quad (4.1)$$

e por um campo magnético uniforme

$$\mathbf{B} = B\hat{z} \quad (4.2)$$

perpendicular ao plano de movimento da partícula.

Esses dois campos definem o seguinte potencial vetor

$$\mathbf{A}_{WHW} = -\alpha \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (4.3)$$

Substituindo as equações (4.1) e (4.2) na equação anterior, segue que:

$$\mathbf{A}_{WHW} = \left( \frac{\alpha \lambda B}{2\pi\rho} \right) \hat{\phi} \quad (4.4)$$

A fase associada ao efeito Wei-Han-Wei é, portanto, dada por:

$$\Delta g = \oint_C \mathbf{A}_{WHW} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_C \left( \frac{\alpha \lambda B}{2\pi\rho} \right) (\rho d\phi) = \alpha \lambda B. \quad (4.5)$$

Como podemos notar na (4.5), a polarizabilidade  $\alpha$ , o módulo do campo magnético  $B$  e a densidade linear de carga  $\lambda$  contribuem a definir a fase geométrica que a partícula neutra adquire quando acoplada pela interação de Wei-Han-Wei.

Também existe um análogo à quantização de Landau para uma partícula neutra sob a interação de Wei-Han-Wei. O seguinte espectro de energia para esse caso foi obtido por Ribeiro et al. [70]:

$$\mathcal{E}_{n,m} = \left( n + \frac{|m|}{2} + \frac{1}{2} \right) \delta \omega_{WHW} - \frac{m}{2} \omega_{WHW}, \quad (4.6)$$

onde

$$\delta = 1 - \frac{m^*}{\alpha B^2} \quad (4.7)$$

e

$$\omega_{HWW} = \frac{\alpha \lambda B}{m^*}. \quad (4.8)$$

é a frequência de Wei-Han-Wei.

## 4.2 Partícula Neutra com Momento de Dipolo Elétrico Induzido Confinada em um Anel Quântico sob Rotação

Nesta seção, estudaremos a dinâmica quântica de uma partícula neutra confinada pelo potencial de um anel quântico girante e sujeita ao acoplamento de Wei-Han-Wei.

No limite não-relativístico, o Hamiltoniano que descreve a dinâmica quântica de um átomo neutro (de massa  $m^*$  e que não apresenta momento de dipolo elétrico permanente)



que interage com o arranjo de campos elétrico e magnético proposto por Ribeiro et al. [70], com base na ideia de Wei-Han-Wei [69], é dado por:

$$H = \frac{1}{2M} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{WHW})^2 - \frac{1}{2} \alpha \mathbf{E}^2, \quad (4.9)$$

onde

$$M = m^* + \alpha B^2 \quad (4.10)$$

é a uma espécie de massa efetiva proveniente da interação de Wei-Han-Wei e  $\mathbf{A}_{WHW}$  é o potencial vetor de Wei-Han-Wei, por sua vez, é dado por

$$\mathbf{A}_{WHW} = -\alpha \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (4.11)$$

onde  $\alpha$  mede a capacidade de polarização da partícula neutra quando sujeita a um campo elétrico.

Considerando um campo magnético uniforme orientado na direção  $z$ ,  $\mathbf{B} = B \hat{z}$  e adotando a seguinte configuração para o campo elétrico adotada por Ribeiro et al. [70]:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda_e}{2} \rho \hat{\rho}, \quad (4.12)$$

onde  $\lambda_e$  representa uma densidade linear de carga, segue que o potencial vetor de Wei-Han-Wei fica assim:

$$\mathbf{A}_{WHW} = \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{2} \rho \right) \hat{\phi}. \quad (4.13)$$

Associado ao potencial vetor (4.13), temos o seguinte campo magnético efetivo

$$\mathbf{B}_{WHW} = (\alpha \lambda_e B) \hat{z}, \quad (4.14)$$

conhecido como o campo magnético de Wei-Han-Wei. Esse termo é quem garante que a partícula neutra tenha uma quantização de energia análoga à quantização de Landau para uma partícula carregada [52].

Além da quantização de Landau, estamos interessados em investigar efeitos análogos de correntes persistentes para partículas neutras. Para tanto, devemos ter um campo magnético efetivo com a mesma forma funcional para partículas carregadas [conf. equação (1.11)], isto é,

$$\mathbf{B}_{ef} = [B_{WHW} + \Phi_{WHW} \delta^2(\rho)] \hat{z}, \quad (4.15)$$

onde  $\delta^2(\rho)$  é a função delta de Dirac em duas dimensões e  $\Phi_{WHW} = \ell \phi_{WHW}$  é o fluxo Wei-Han-Wei associado com a fase geométrica de Wei-Han-Wei [69] e  $\ell$  é um número inteiro. O potencial vetor que nos fornece o campo magnético efetivo (4.15) é dado por

$$\mathbf{A}_{\Phi_{WHW}} = \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{2} \rho + \frac{\Phi_{WHW}}{2\pi} \frac{1}{\rho} \right) \hat{\phi}, \quad (4.16)$$

onde vemos claramente que o primeiro termo é exatamente o acoplamento de Wei-Han-Wei, enquanto o segundo é responsável pela criação do fluxo Wei-Han-Wei.

Para sistema reais, conforme discussão apresentada nas referências [69], [71] e [72], a contribuição dos termos  $\alpha \mathbf{B}^2$  e  $\alpha \mathbf{E}^2$  é muito pequena. Mesmo considerando uma partícula alta polarizabilidade ( $\alpha \sim 10^{-39} \text{ Fm}^2$ ) interagindo com um campo magnético intenso ( $B \sim 10T$ ), o termo de massa  $\alpha \mathbf{B}^2 \leq 10^{-37} \text{ kg}$  corresponde a  $10^{-10}$  da massa de um nucleon, o que é evidentemente desprezível. O mesmo acontece com o termo que envolve o campo elétrico: para um campo elétrico da ordem de  $10^7 \text{ V/m}$ , a energia associada ao termo  $\alpha \mathbf{E}^2$  é da ordem de  $10^{-25} \text{ J}$ , que é muito pequena quando comparada com a energia cinética dos átomos. Sendo assim, sem perda de generalidade, os termos  $\alpha \mathbf{B}^2$  e  $\alpha \mathbf{E}^2$  podem ser desprezados na equação (4.9). Desse modo, o Hamiltoniano que nos possibilita estudar tanto efeitos de quantização de Landau, assim como de correntes de spin para partículas neutras é dado por:

$$H = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{WHW}})^2. \quad (4.17)$$

Introduzindo agora a contribuição de um anel quântico, a equação (4.17) fica assim:

$$H = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{WHW}})^2 + V(\rho), \quad (4.18)$$

onde  $V(\rho)$  é o potencial de confinamento de um anel quântico, conhecido como potencial de Tan-Inkson, que é dado por

$$V(\rho) = \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0, \quad (4.19)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são parâmetros constantes e  $V_0 = 2\sqrt{a_1 a_2}$ .

Vamos agora introduzir a contribuição da rotação para a dinâmica quântica da partícula. O Hamiltoniano  $H$  dado na equação (4.18) é definido em um sistema de referência inercial. Definiremos agora um Hamiltoniano  $H_\Omega$  em um sistema de referência que gira com velocidade angular constante  $\Omega$  em torno de um eixo fixo. Esses dois Hamiltonianos se relacionam da seguinte forma:

$$H_\Omega = H - \Omega \cdot \mathbf{L}, \quad (4.20)$$

onde  $\mathbf{L}$  é o momento angular da partícula.

Substituindo a equação (4.18) na equação (4.20), temos que

$$H_\Omega = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{WHW}})^2 - \Omega \cdot \mathbf{L} + V(\rho). \quad (4.21)$$

e lembrando que  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  e tendo em mente que, para o nosso caso, o vetor  $\mathbf{r}$  serve para localizar um ponto fixo sobre o anel, segue que

$$\begin{aligned} H_\Omega &= \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{WHW}})^2 - \Omega \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + V(\rho) \\ &= \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{WHW}})^2 - \mathbf{p} \cdot (\Omega \times \mathbf{r}) + V(\rho). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Pelo fato de considerarmos uma rotação  $\mathbf{\Omega}$  constante, podemos reescrever a equação anterior de uma forma mais conveniente:

$$H_{\Omega} = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - \mathbf{A}_{\Phi_{WHW}} - m^* (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}))^2 - \frac{1}{2} m^* (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})^2 + V(\rho). \quad (4.23)$$

Como podemos notar, o termo cinético do Hamiltoniano (4.23) possui, além do acoplamento mínimo com o potencial vetor de Wei-Han-Wei, um termo extra associado com a rotação do sistema de referência. Essa termo extra sugere que a força de Coriolis presente no sistema de referência não-inercial faz um papel análogo ao da força de Lorentz que atua sobre uma partícula carregada em um campo magnético uniforme. Com isso em mente, é válido pensar que o termo  $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$  dentro do termo cinético se comporta como um acoplamento mínimo e pode ser entendido como um potencial vetor efetivo associado ao efeito não-inercial de rotação, isto é,

$$\mathbf{A}_{\Omega} \equiv \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (4.24)$$

Considerando um ponto fixo sobre o anel localizado pelo vetor  $\mathbf{r} = (\rho, 0, 0)$  e que esse ponto descreve uma rotação  $\mathbf{\Omega} = \Omega \hat{z}$  em torno do eixo  $\hat{z}$ , o potencial vetor efetivo  $\mathbf{A}_{\Omega}$  associado ao efeito não-inercial de rotação fica assim:

$$\mathbf{A}_{\Omega} = \Omega \rho \hat{\phi}. \quad (4.25)$$

A equação (4.23) é, portanto, o Hamiltoniano que descreve a dinâmica quântica de uma partícula carregada, confinada em um anel quântico girante. Iremos agora proceder com a resolução da equação de Schrödinger associada a esse Hamiltoniano em duas situações distintas: primeiramente, obteremos os autovalores de energia e as autofunções considerando um espaço plano e logo em seguida, a equação de Schrödinger será resolvida no background de uma deslocação tipo-hélice.

#### 4.2.1 Anel Quântico sob Rotação em um Espaço Plano

Vamos agora resolver a equação de Schrödinger em um espaço euclidiano para o sistema descrito pelo Hamiltoniano (4.23).

Pelo fato de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}_{\Omega}$  apresentarem uma contribuição não nula apenas na direção azimutal, segue que o Hamiltoniano (4.23) escrito em coordenadas cilíndricas, num espaço plano fica assim:

$$H_{\Omega} = -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right) - i(A_{\Phi_{WHW}})_{\phi} - i m^* (A_{\Omega})_{\phi} \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} m^* (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})^2 + V(\rho). \quad (4.26)$$

Agora, iremos proceder com a resolução da equação de Schrödinger associada ao Hamiltoniano (4.26). Substituindo as contribuições do campo elétrico (4.12), do potencial vetor de Wei-Han-Wei modificado (4.16), da rotação (4.25) e do potencial de Tan-Inkson (4.19) na equação (4.26), tal Hamiltoniano assume a seguinte forma

$$H_{\Omega} = -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\Phi_{WHW}}{2\pi} \right) - \frac{im^*}{2} \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} + 2\Omega \right) \rho \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} m^* \Omega^2 \rho^2 + \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0. \quad (4.27)$$

A equação de Schrödinger independente do tempo associada ao Hamiltoniano (4.27) é dada por

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\Phi_{WHW}}{2\pi} \right)^2 - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right. \\ & \quad \cdot \left[ \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right) \right] \rho^2 - im^* \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} + 2\Omega \right) \\ & \quad \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\Phi_{WHW}}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left. \right] \Psi + \left[ \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0 \right] \Psi = \mathcal{E} \Psi. \quad (4.28) \end{aligned}$$

Depois de algumas manipulações matemáticas, temos que

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\Phi_{WHW}}{2\pi} \right)^2 - 2m^* a_1 \right] - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right. \\ & \quad \cdot \left[ \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right] \rho^2 - im^* \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} + 2\Omega \right) \\ & \quad \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{\Phi_{WHW}}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2m^* (V_0 + \mathcal{E}) \left. \right] \Psi = 0. \quad (4.29) \end{aligned}$$

Lembrando que  $\Phi_{WHW} = \ell \phi_{WHW}$ , a equação anterior fica assim:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right)^2 - 2m^* a_1 \right] - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right. \\ & \quad \cdot \left[ \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right] \rho^2 - im^* \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} + 2\Omega \right) \\ & \quad \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2m^* (V_0 + \mathcal{E}) \left. \right] \Psi = 0. \quad (4.30) \end{aligned}$$

Devido a simetria do problema, utilizamos o seguinte anzats

$$\Psi = A R(\rho) e^{im\phi} e^{ikz} \quad (4.31)$$

onde  $A$  é a constante de normalização. Depois de algumas transformações, obtemos a seguinte equação radial

$$\begin{aligned} R'' + \frac{1}{\rho}R' - \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( m - \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right)^2 + 2m^*a_1 \right] R - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \cdot \\ \cdot \left[ \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right] \rho^2 R + \left[ m^* \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} + 2\Omega \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left( m - \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right) - k^2 + 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} - \frac{\mu \lambda_e}{2m^*} \right) \right] R = 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Introduzindo as seguintes definições

$$\begin{aligned} \omega_{WHW}^2 &= \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right)^2; \\ \omega_0^2 &= \frac{8a_2}{m^*}; \\ \omega^2 &= \omega_{WHW}^2 + 4\Omega \omega_{WHW} + \omega_0^2; \\ L^2 &= \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right)^2 + 2m^*a_1; \\ \gamma' &= 2m^* (V_0 + \mathcal{E}) + m^* \omega^* \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right) - k^2; \\ \omega^* &= \omega_{WHW} + 2\Omega, \end{aligned} \quad (4.33)$$

a equação radial (4.32) assume uma forma bem conhecida:

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' + \left[ -\frac{m^{*2}\omega^2}{4\hbar^2}\rho^2 + \gamma' - \frac{L^2}{\rho^2} \right] R = 0. \quad (4.34)$$

Procedendo com a seguinte mudança de variáveis

$$\xi = \frac{m^*\omega}{2}\rho^2 \quad (4.35)$$

podemos reescrever a equação (4.34) assim:

$$\xi \ddot{R} + \dot{R} + \left[ -\frac{\xi}{4} + \gamma - \frac{L^2}{4\xi} \right] R = 0, \quad (4.36)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{2m^*\omega} \left[ 2m^* (V_0 + \mathcal{E}) + m^* \omega^* \left( m - \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right) - k^2 \right]. \quad (4.37)$$

Analizando o comportamento da equação (4.36) nos limites assintóticos, isto é, para  $\xi \rightarrow 0$  and para  $\xi \rightarrow \infty$  [conf. (A.1)], podemos escrever uma solução para a equação (4.36) na seguinte forma:

$$R(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{|L|/2} \zeta(\xi), \quad (4.38)$$

Substituindo então a equação (4.38) na equação (4.36), verifica-se facilmente que a função  $\zeta(\xi)$  obedece à seguinte equação diferencial:

$$\xi \ddot{\zeta} + (|L| + 1 - \xi) \dot{\zeta} - \left[ \frac{|L| + 1}{2} - \gamma \right] \zeta = 0, \quad (4.39)$$

onde (4.39) é a equação hipergeométrica, cuja solução é a função hipergeométrica confluyente:

$$\zeta(\xi) = F \left[ - \left( \gamma - \frac{|L| + 1}{2} \right); |L| + 1; \xi \right]. \quad (4.40)$$

A quantização da energia vem do fato de que a função hipergeométrica deve obedecer a uma condição de convergência, condição esta que é satisfeita quando o primeiro parâmetro da função hipergeométrica (4.40) for igual a um número inteiro negativo, isto é:

$$- \left( \gamma - \frac{|L| + 1}{2} \right) = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.41)$$

Substituindo a equação (4.37) na equação (4.41), segue que

$$- \left( \frac{1}{2m^*\omega} \left[ 2m^*(V_0 + \mathcal{E}) + m^*\omega^* \left( m - \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right) - k^2 \right] - \frac{|L| + 1}{2} \right) = -n \quad (4.42)$$

A partir daí, facilmente obtemos o seguinte espectro de energia:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2} (m - \ell^*) \omega^* - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{k^2}{2m^*}, \quad (4.43)$$

onde

$$\ell^* = \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \quad (4.44)$$

foi introduzido para simplificar a notação.

Os números quânticos  $n$ ,  $m$  e  $k$  caracterizam respectivamente o movimento da partícula na direção radial, o momento angular e o movimento da partícula na direção  $z$ . Devido a condição de quantização imposta pela função hipergeométrica, o número quântico  $n$  deve ser um número inteiro maior ou igual a zero. Como a função de onda apresenta condição de contorno periódica na direção azimutal, o número quântico  $m$  pode assumir qualquer valor inteiro. Por fim, o número quântico  $k$  pode assumir qualquer valor de  $-\infty$  a  $+\infty$ , pelo fato de o movimento da partícula não ser quantizado nessa direção.

Mais uma vez, vemos claramente na equação (4.43) que a única contribuição do fluxo Wei-Han-Wei é de alterar o número quântico  $m$  para  $(m - \beta k - \ell)$ . De maneira semelhante aos casos anteriores, os níveis de energia são caracterizados por três frequências:  $\omega$ ,  $\omega^*$  e  $\omega_0$ . A primeira delas depende da frequência de Wei-Han-Wei  $\omega_{WHW}$ , do coeficiente  $a_2$  do potencial de Tan-Inkson e também da velocidade angular  $\Omega$ . A segunda frequência  $\omega^*$  é definida pela soma da frequência de Wei-Han-Wei  $\omega_{WHW}$  com a rotação  $\Omega$ . Finalmente,

a terceira frequência  $\omega_0$  é a frequência característica do potencial de confinamento de Tan-Inkson que, por sua vez, depende apenas do parâmetro  $a_2$ .

Analisando o limite em que o sistema não gira, isto é, considerando  $\Omega = 0$ , segue da equação (4.43) que:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega_{WHW} - \frac{1}{2} (m - \ell^*) \omega_{WHW} - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{k^2}{2m^*}, \quad (4.45)$$

que é o mesmo resultado apresentado em [73] para um dipolo elétrico induzido confinado pelo potencial de um anel quântico. E se em seguida fizermos  $a_1 = a_2 = 0$  na equação anterior, recuperamos o mesmo espectro obtido por [70].

Vamos agora obter as autofunções de energia. Substituindo a equação (4.40) na (4.38) e voltando para a variável  $\rho$ , temos que

$$R(\rho) = \left( \frac{1}{2^{|L|}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho}{\lambda_0} \right)^{|L|} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right]. \quad (4.46)$$

Reunindo agora as equações (4.31) e (4.46), a função de onda não normalizada para o nosso problema fica assim:

$$\Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = A \left( \frac{1}{2^{|L|}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho}{\lambda_0} \right)^{|L|} e^{im\phi} e^{ikz} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right]. \quad (4.47)$$

Da equação (22) temos que

$$A = \frac{1}{\lambda_0} \left[ \frac{(n + |L|)!}{2^n n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2}, \quad (4.48)$$

o que, finalmente, nos leva às seguintes autofunções normalizadas:

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\lambda_0^{|L|+1}} \left[ \frac{\Gamma(n + |L| + 1)}{2^{|L|+1} n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2} \\ \cdot e^{im\phi} e^{ikz} \rho^{|L|} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right], \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m^* \omega}} \quad (4.50)$$

é o comprimento magnético renormalizado pela interação de Wei-Han-Wei, pelo confinamento do anel e pelo efeito não-inercial. O comprimento magnético  $\lambda_0$  representa a amplitude de oscilação e também serve como um fator de escala, dando as dimensões típicas do sistema.

## 4.2.2 Anel Quântico sob Rotação no Espaço de uma Deslocação Tipo-Hélice

Vamos agora resolver a equação de Schrödinger para uma partícula neutra que adquire um momento de dipolo elétrico induzido pela interação de Wei-Han-Wei, confinada pelo potencial de um anel quântico girante, na presença de uma deslocação tipo-hélice.

A métrica que descreve um espaço distorcido pela presença de uma deslocação tipo-hélice é dada por:

$$ds^2 = d\rho^2 + (dz + \beta d\phi)^2 + \rho^2 d\phi^2, \quad (4.51)$$

onde  $\rho > 0$ ,  $0 < \phi < 2\pi$  e  $-\infty < z < \infty$ . Na métrica (4.51), a única componente não nula do vetor de Burges é a componente na direção  $\hat{z}$ , isto é,  $b^z = 2\pi\beta$ .

Para investigarmos quais são as contribuições desse defeito nas as propriedades de uma partícula carregada confinada em um anel quântico sob rotação, precisamos escrever .

Pelo fato de  $\mathbf{A}_{\Phi_{AC}}$  e  $\mathbf{A}_{\Omega}$  apresentarem uma contribuição não nula apenas na direção azimutal, o Hamiltoniano (4.23) escrito no background da métrica (4.51) fica assim:

$$H_{\Omega} = -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right) - i(A_{\Phi_{WHW}})_{\phi} - im^*(A_{\Omega})_{\phi} \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} m^* (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - \frac{1}{2} \alpha \mathbf{E}^2 + V(\rho). \quad (4.52)$$

Agora, iremos proceder com a resolução da equação de Schrödinger associada ao Hamiltoniano (4.52). Substituindo as contribuições do campo elétrico (4.12), do potencial vetor de Wei-Han-Wei modificado (4.16), da rotação (4.25) e do potencial de Tan-Inkson (4.19) na equação (4.52), tal Hamiltoniano assume a seguinte forma

$$H_{\Omega} = -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{WHW}}{2\pi} \right) - \frac{im^*}{2} \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} + 2\Omega \right) \rho \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{1}{2} m^* \Omega^2 \rho^2 + \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0. \quad (4.53)$$

A equação de Schrödinger independente do tempo associada ao Hamiltoniano (4.53) é dada por

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2m^*} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{WHW}}{2\pi} \right)^2 - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right. \\ & \quad \cdot \left[ \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right) \right] \rho^2 - im^* \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} + 2\Omega \right) \cdot \\ & \quad \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{WHW}}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Big] \Psi + \left[ \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 - V_0 \right] \Psi = \mathcal{E} \Psi. \end{aligned} \quad (4.54)$$



Depois de algumas manipulações matemáticas, temos que

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{WHW}}{2\pi} \right)^2 - 2m^* a_1 \right] - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right. \\ & \quad \cdot \left[ \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right] \rho^2 - im^* \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} + 2\Omega \right) \\ & \quad \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{WHW}}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2m^* (V_0 + \mathcal{E}) \Big] \Psi = 0. \quad (4.55) \end{aligned}$$

Lembrando que  $\Phi_{WHW} = \ell \phi_{WHW}$ , a equação anterior fica assim:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right)^2 - 2m^* a_1 \right] - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \right. \\ & \quad \cdot \left[ \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right] \rho^2 - im^* \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} + 2\Omega \right) \\ & \quad \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2m^* (V_0 + \mathcal{E}) \Big] \Psi = 0. \quad (4.56) \end{aligned}$$

Devido a simetria do problema, utilizamos o seguinte anzats

$$\Psi = A R(\rho) e^{im\phi} e^{ikz} \quad (4.57)$$

onde  $A$  é a constante de normalização. Depois de algumas transformações, obtemos a seguinte equação radial

$$\begin{aligned} & R'' + \frac{1}{\rho} R' - \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right)^2 + 2m^* a_1 \right] R - \left( \frac{m^*}{2} \right)^2 \\ & \quad \cdot \left[ \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right)^2 + 4\Omega \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right) + \frac{8a_2}{m^*} \right] \rho^2 R + \left[ m^* \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} + 2\Omega \right) \right. \\ & \quad \cdot \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right) - k^2 + 2m^* \left( V_0 + \mathcal{E} - \frac{\mu \lambda_e}{2m^*} \right) \Big] R = 0. \quad (4.58) \end{aligned}$$

Introduzindo as seguintes definições

$$\begin{aligned} \omega_{WHW}^2 &= \left( \frac{\alpha \lambda_e B}{m^*} \right)^2; \\ \omega_0^2 &= \frac{8a_2}{m^*}; \\ \omega^2 &= \omega_{WHW}^2 + 4\Omega \omega_{WHW} + \omega_0^2; \\ L^2 &= \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right)^2 + 2m^* a_1; \\ \gamma' &= 2m^* (V_0 + \mathcal{E}) + m^* \omega^* \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right) - k^2; \\ \omega^* &= \omega_{WHW} + 2\Omega, \end{aligned} \quad (4.59)$$

a equação radial (4.58) assume uma forma bem conhecida:

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' + \left[ -\frac{m^{*2}\omega^2}{4\hbar^2}\rho^2 + \gamma' - \frac{L^2}{\rho^2} \right] R = 0. \quad (4.60)$$

Procedendo com a seguinte mudança de variáveis

$$\xi = \frac{m^*\omega}{2}\rho^2 \quad (4.61)$$

podemos reescrever a equação (4.60) assim:

$$\xi\ddot{R} + \dot{R} + \left[ -\frac{\xi}{4} + \gamma - \frac{L^2}{4\xi} \right] R = 0, \quad (4.62)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{2m^*\omega} \left[ 2m^*(V_0 + \mathcal{E}) + m^*\omega^* \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right) - k^2 \right]. \quad (4.63)$$

Analizando o comportamento da equação (4.62) nos limites assintóticos, isto é, para  $\xi \rightarrow 0$  and para  $\xi \rightarrow \infty$  [conf. (A.1)], podemos escrever uma solução para a equação (4.62) na seguinte forma:

$$R(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{|L|/2} \zeta(\xi), \quad (4.64)$$

Substituindo então a equação (4.64) na equação (4.62), verifica-se facilmente que a função  $\zeta(\xi)$  obedece à seguinte equação diferencial:

$$\xi\ddot{\zeta} + (|L| + 1 - \xi)\dot{\zeta} - \left[ \frac{|L| + 1}{2} - \gamma \right] \zeta = 0, \quad (4.65)$$

onde (4.65) é a equação hipergeométrica, cuja solução é a função hipergeométrica confluyente:

$$\zeta(\xi) = F \left[ -\left( \gamma - \frac{|L| + 1}{2} \right); |L| + 1; \xi \right]. \quad (4.66)$$

A quantização da energia vem do fato de que a função hipergeométrica deve obedecer a uma condição de convergência, condição esta que é satisfeita quando o primeiro parâmetro da função hipergeométrica (4.66) for igual a um número inteiro negativo, isto é:

$$-\left( \gamma - \frac{|L| + 1}{2} \right) = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.67)$$

Substituindo a equação (4.63) na equação (4.67), segue que

$$-\left( \frac{1}{2m^*\omega} \left[ 2m^*(V_0 + \mathcal{E}) + m^*\omega^* \left( m - \beta k - \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \right) - k^2 \right] - \frac{|L| + 1}{2} \right) = -n \quad (4.68)$$

A partir daí, facilmente obtemos o seguinte espectro de energia:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2} (m - \beta k - \ell^*) \omega^* - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{k^2}{2m^*}, \quad (4.69)$$

onde

$$\ell^* = \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \quad (4.70)$$

foi introduzido para simplificar a notação.

Os números quânticos  $n$ ,  $m$  e  $k$  caracterizam respectivamente o movimento da partícula na direção radial, o momento angular e o movimento da partícula na direção  $z$ . Devido a condição de quantização imposta pela função hipergeométrica, o número quântico  $n$  deve ser um número inteiro maior ou igual a zero. Como a função de onda apresenta condição de contorno periódica na direção azimutal, o número quântico  $m$  pode assumir qualquer valor inteiro. Por fim, o número quântico  $k$  pode assumir qualquer valor de  $-\infty$  a  $+\infty$ , pelo fato de o movimento da partícula não ser quantizado nessa direção.

Comparando as equações (4.43) e (4.69), vemos claramente que a única contribuição da presença do defeito topológico sobre os autovalores de energia é de, assim como o fluxo Wei-Han-Wei, alterar o número quântico  $m$  para  $(m - \beta k - \ell)$ . Se fizermos  $\beta = 0$  na equação (4.69), vemos facilmente que a equação (4.43) é recuperada. Como acabamos de mostrar, a contribuição do defeito topológico sobre o espectro de energia é apenas sobre o número quântico  $m$ , as frequências que caracterizam não são afetadas pelo parâmetro  $\beta$ . Sendo assim, as frequências  $\omega$ ,  $\omega^*$  e  $\omega_0$  que aparecem na equação (4.69) são as mesmas que descrevem o movimento da partícula na equação (4.43).

Na equação (4.45) analisamos o comportamento dos níveis de energia para a partícula na ausência de rotação. Vamos agora analisar outros limites. Fazendo  $\omega_{WHW} \rightarrow 0$  na equação (4.69), segue que:

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega_0 - (m - \beta k - \ell^*) \Omega - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{k^2}{2m^*}, \quad (4.71)$$

o que nos mostra que, mesmo na ausência da interação de Wei-Han-Wei, a rotação do sistema de referência desempenha um papel muito importante sobre os autovalores de energia da partícula.

Vamos agora obter as autofunções de energia. Substituindo a equação (4.66) na (4.64) e voltando para a variável  $\rho$ , temos que

$$R(\rho) = \left( \frac{1}{2^{|L|}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho}{\lambda_0} \right)^{|L|} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right]. \quad (4.72)$$

Reunindo agora as equações (4.57) e (4.72), a função de onda não normalizada para o nosso problema fica assim:

$$\Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = A \left( \frac{1}{2^{|L|}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho}{\lambda_0} \right)^{|L|} e^{im\phi} e^{ikz} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2} \right) F \left[ -n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2} \right]. \quad (4.73)$$

Da equação (22) temos que

$$A = \frac{1}{\lambda_0} \left[ \frac{(n + |L|)!}{2^n n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2}, \quad (4.74)$$

o que, finalmente, nos leva às seguintes autofunções normalizadas:

$$\Psi_{n,m,k}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\lambda_0^{|L|+1}} \left[ \frac{\Gamma(n + |L| + 1)}{2^{|L|+1} n! [\Gamma(|L| + 1)]^2 \pi} \right]^{1/2} \cdot e^{im\phi} e^{ikz} \rho^{|L|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\lambda_0^2}\right) F\left[-n; |L| + 1; \frac{\rho^2}{2\lambda_0^2}\right], \quad (4.75)$$

onde

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m^* \omega}} \quad (4.76)$$

é o comprimento magnético renormalizado pela interação de Wei-Han-Wei, pelo confinamento do anel e pelo efeito não-inercial. O comprimento magnético  $\lambda_0$  representa a amplitude de oscilação e também serve como um fator de escala, dando as dimensões típicas do sistema.

### 4.2.3 Corrente Persistente

Vamos agora obter uma expressão análoga para a corrente persistente associada com uma partícula neutra que adquire um momento de dipolo elétrico ao interagir com o acoplamento de Wei-Han-Wei, sob o confinamento de um anel quântico girante.

Uma maneira de se obter a corrente carregada por um dado estado eletrônico  $\Psi_{n,m,k}$  é através da seguinte equação:

$$I_{n,m,k} = \int dz \int d\phi \int dr j_{n,m,k}(r, \phi, z), \quad (4.77)$$

onde  $j_{n,m,k}(r, \phi, z)$  é a densidade de corrente para esse estado quântico.

No entanto, já que conhecemos a expressão analítica para o espectro de energia, é mais conveniente calcular  $I_{n,m,k}$  usando a relação Byers-Yang [54]:

$$\begin{aligned} I_{n,m,k} &= -\frac{\partial \mathcal{E}_{n,m,k}}{\partial \Phi_{WHW}} \\ &\Downarrow \\ I_{n,m,k} &= -\frac{1}{\phi_{WHW}} \frac{\partial \mathcal{E}_{n,m,k}}{\partial \ell}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

lembrando que  $\phi_{WHW}$  é a fase de Wei-Han-Wei.

A corrente persistente total é, portanto, a soma das correntes carregadas por todos estados eletrônicos ocupados:

$$I = \sum_{n,m,k} I_{n,m,k}, \quad (4.79)$$

onde devemos ter em mente que a soma em  $k$  na verdade é uma integral, pelo simples fato de  $k$  poder assumir valores contínuos.

Substituindo a equação (4.69) na equação (4.78), segue que a corrente persistente para o nosso sistema é dada por:

$$I_{n,m,k} = \frac{\omega}{4\pi} \left( \frac{|m - \beta k - \ell^*|}{L} - \frac{\omega^*}{\omega} \right), \quad (4.80)$$

lembrando que  $\ell^* = \ell(\phi_{WHW}/2\pi)$ .

Note que a corrente persistente é uma função do fluxo Wei-Han-Wei e do vetor de Burgers. Deve-se também observar a dependência da corrente persistente com relação a velocidade de rotação  $\Omega$  através das frequências  $\omega$  e  $\omega^*$ .

#### 4.2.3.1 Limite para o ponto quântico

Pelo fato de o potencial de Tan-Inkson (4.19) ser um modelo muito versátil, podemos utilizá-lo para descrever diversas estruturas quânticas. Um ponto quântico é modelado por um confinamento parabólico. Sendo assim, fazendo  $a_1 = 0$  na equação (4.19) obtemos que

$$V(\rho) = a_2 \rho^2, \quad (4.81)$$

isto é, a equação (4.81) descreve o potencial de confinamento para um ponto quântico.

Vamos agora obter uma expressão para a corrente persistente de um ponto quântico. Fazendo agora  $a_1 = 0$  na equação (4.80), chegamos à seguinte expressão para a corrente persistente de um ponto quântico:

$$I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell^* \neq 0} = \begin{cases} -\frac{(\omega^* - \omega)}{4\pi} = -\frac{(\omega_{WHW} - \omega)}{4\pi} - \frac{2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell^* > 0, \\ -\frac{(\omega^* + \omega)}{4\pi} = -\frac{(\omega_{WHW} + \omega)}{4\pi} - \frac{2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell^* < 0. \end{cases} \quad (4.82)$$

A expressão (4.82) só é válida para estados em que  $m - \beta k - \ell^* \neq 0$ . Isso se deve ao fato de que a função de onda dos estados com  $m - \beta k - \ell^* = 0$  pode assumir um valor não nulo para  $\rho = 0$ . Nessas condições, a relação de Byers-Yang utilizada para obter a expressão (4.80) não pode mais ser utilizada.

No entanto, uma vez que a equação (4.80) se aplica a todos os estados com  $a_1 \neq 0$ , a corrente transportada em um ponto quântico por um estado com  $m - \beta k - \ell^* = 0$  pode ser obtida tomando o limite:

$$\begin{aligned} I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell^*=0} &= \lim_{a_1 \rightarrow 0^+} \left[ \lim_{(m-\beta k) \rightarrow \ell^*} \frac{\omega}{4\pi} \left( \frac{|m - \beta k - \ell^*|}{L} - \frac{\omega^*}{\omega} \right) \right] \\ &= -\frac{\omega^*}{4\pi} \\ &= -\frac{\omega_{WHW}}{4\pi} - \frac{2\Omega}{4\pi}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Vamos agora analisar o comportamento do anel e do ponto quântico na ausência da interação de Wei-Han-Wei. Fazendo  $\omega_{WHW} \rightarrow 0$  nas equações (4.80), (4.82) e (4.83), obtemos para o anel quântico que

$$I_{n,m,k} = \frac{\omega_0}{4\pi} \left( \frac{|m - \beta k - \ell^*|}{L} - \frac{2\Omega}{\omega_0} \right). \quad (4.84)$$

Já para o ponto quântico, segue que

$$I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell^* \neq 0} = \begin{cases} +\frac{\omega_0}{4\pi} - \frac{2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell^* > 0, \\ -\frac{\omega_0}{4\pi} - \frac{2\Omega}{4\pi}, & \text{para } m - \beta k - \ell^* < 0. \end{cases} \quad (4.85)$$

e que

$$I_{n,m,k} \Big|_{(m-\beta k)-\ell^*=0} = -\frac{2\Omega}{4\pi}. \quad (4.86)$$

As equações (4.84), (4.85) e (4.86) nos mostram que a rotação do sistema de referência é suficiente para induzir um efeito análogo de corrente persistente para o dipolo elétrico induzido. Também deve-se observar que, em alguns casos, o sentido dessas correntes é oposto ao sentido da rotação.

#### 4.2.4 Magnetização

Vamos agora obter uma expressão análoga ao caso de partículas carregadas para a magnetização de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido, confinada em um anel quântico girante e analisar sua relação com a corrente persistente.

Para o dipolo elétrico induzido, obtemos a magnetização análoga tomando a derivada do espectro (4.69) com relação ao campo magnético efetivo de Wei-Han-Wei (4.14):

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = -\frac{\partial \mathcal{E}_{n,m,k}}{\partial B_{WHW}} \Big|_N, \quad (4.87)$$

onde  $\mathcal{E}_{n,m,k}$  é o autovalor de energia do estado  $(n, m, k)$ .

Como o campo magnético  $\mathbf{B}_{WHW}$  e a frequência  $\omega_{WHW}$  de Wei-Han-Wei estão interrelacionadas, a magnetização para o estado  $(n, m, k)$  é obtida assim:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = -\frac{1}{m^*} \frac{\partial \mathcal{E}_{n,m,k}}{\partial \omega_{WHW}} \Big|_N. \quad (4.88)$$

A magnetização total é obtida através da soma

$$\mathcal{M} = \sum_{n,m,k} \mathcal{M}_{n,m,k}, \quad (4.89)$$

sobre todos os estados ocupados. Por mera força de expressão, em algumas situações utilizaremos momento magnético e magnetização como sinônimos.

Substituindo o espectro de energia (4.69) na equação (4.88), segue que o momento magnético para o nosso sistema é dado por:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = -\frac{1}{m^*} \left[ \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \left( 1 + 2 \frac{\Omega}{\omega_{WHW}} \right) \frac{\omega_{WHW}}{\omega} - \frac{1}{2} (m - \beta k - \ell^*) \right]. \quad (4.90)$$

Vale a pena notar que podemos representar a magnetização em termos da corrente persistente (4.80). Para tanto, definindo o raio efetivo em termos do comprimento magnético  $\lambda_0$

$$r_{n,m,k} = (2L)^{1/2} \lambda_0, \quad (4.91)$$

ficamos aptos a relacionar a o momento magnético e a corrente através da seguinte equação:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = \pi r_{n,m,k}^2 I_{n,m,k} - \frac{1}{m^*} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\omega_{WHW}}{\omega} + 2 \frac{\Omega}{\omega} \right) \right]. \quad (4.92)$$

Podemos ainda expressar a magnetização (4.92) da seguinte forma:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = M_{n,m,k}^{CL} + M_{n,m,k}^{DS} + M_{n,m,k}^{DSR}, \quad (4.93)$$

onde

$$\mathcal{M}_{n,m,k}^{CL} = \pi r_{n,m,k}^2 I_{n,m,k} \quad (4.94)$$

é a contribuição semelhante a de um momento de dipolo de uma espira circular [55] de raio  $r_{n,m,k}$  percorrida por uma corrente  $I_{n,m,k}$ . É nesse termo que vemos a dependência da magnetização com relação ao defeito, uma vez que a corrente persistente (4.80) depende explicitamente do parâmetro  $\beta$ .

O termo

$$\mathcal{M}_{n,m,k}^{DS} = -\frac{1}{m^*} \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\omega_{WHW}}{\omega} \quad (4.95)$$

é o termo de shift diamagnético associado com a frequência de Wei-Han-Wei e com a frequência  $\omega$  característica desse sistema. Vale ressaltar que a equação (4.95) apresenta a mesma forma funcional da (1.89), mostrando o estreito paralelo entre as propriedades de partículas neutras e carregadas. Finalmente, a terceira contribuição, dada por

$$\mathcal{M}_{n,m,k}^{DSR} = -2 \frac{1}{m^*} \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\Omega}{\omega}, \quad (4.96)$$

representa uma espécie de deslocamento diamagnético, só que sua origem não é magnética, mas sim puramente não-inercial.

Mais uma vez, é notório que o efeito não-inercial da rotação do sistema de referência desempenha um papel muito importante sobre as propriedades físicas do sistema quântico aqui adota. Como o termo (4.96) depende diretamente da rotação, mesmo que as outras contribuições fossem desconsideradas, efeitos únicos associados com a rotação são observados.

### 4.3 Considerações Finais

Neste capítulo, nós estudamos como efeitos não-inerciais afetam a dinâmica quântica de uma partícula neutra que adquire um momento de dipolo elétrico induzido ao interagir com uma configuração cruzada de campos elétrico e magnético que resultam no acoplamento de Wei-Han-Wei, confinada pelo potencial de um anel quântico bidimensional.

Também investigamos quais as contribuições que a torção associada com uma deslocação tipo-hélice traz para propriedades físicas do sistema. A equação de Schrödinger foi resolvida no espaço distorcido pela deslocação e também num espaço plano. Comparando os dois resultados, constatamos que a contribuição do defeito entra como um fluxo de torção.

Ao resolvermos a equação de Schrödinger, obtivemos o espectro de energia para o dipolo magnético que apresenta uma quantização análoga a de Landau. Mostramos que a presença do defeito topológico e da rotação influenciam o níveis de energia. Podemos dizer que a contribuição mais importante é da rotação, pois ela introduz na dinâmica quântica da partícula efeitos antes associados a campos magnéticos.

De posse do espectro de energia, obtivemos expressões análogas para a corrente persistente e para a magnetização. Essas propriedades também são fortemente influenciadas pela rotação.



# Conclusões

Neste trabalho, mostramos como a dinâmica quântica não-relativística de partículas neutras e carregadas confinadas por um anel quântico bidimensional é modificada pela presença de efeitos não-inerciais associados à rotação do sistema de referência e também pela presença de torção introduzida por uma deslocação tipo-hélice.

O capítulo (1) foi dedicado ao estudo do comportamento de partículas carregadas confinadas por um anel quântico girante, sob a ação de um campo magnético uniforme e de um fluxo Aharonov-Bohm [8] confinado ao centro do anel. A equação de Schrödinger foi resolvida tanto no background de uma deslocação tipo-hélice quanto num espaço euclidiano. Para o caso da deslocação tipo-hélice, encontramos o seguinte espectro de energia (1.61):

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega - \frac{1}{2} (m - \beta k - \ell) \hbar\omega^* - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}. \quad (1)$$

A contribuição dos  $\ell$  quanta do fluxo Aharonov-Bohm que atravessam o centro do anel e da deslocação tipo-hélice, cuja intensidade é medida pelo parâmetro  $\beta$ , sobre o espectro de energia (1) é de apenas introduzir um shift no número quântico azimutal  $m$ , que é modificado para  $m - \beta k - \ell$ . Entretanto, essas duas contribuições são importantes na observação de efeitos de interferência quântica, uma vez que as funções de onda (1.66) dependem implicitamente do fluxo Aharonov-Bohm e da deslocação através do parâmetro

$$L^2 = (m - \beta k - \ell)^2 + \frac{2m^* a_1}{\hbar^2}. \quad (2)$$

Vale notar que se desconsiderarmos a contribuição da deslocação tipo-hélice, isto é, fazendo  $\beta = 0$  na equação (1), recuperamos o espectro de energia de uma partícula carregada confinada em um anel quântico girante, em um espaço plano, resultado este que foi obtido e pode-se verificar na equação (1.36).

O espectro de energia (1) é caracterizado por três frequências: a frequência cíclotron  $\omega_c$ , a frequência de rotação  $\Omega$  e a frequência  $\omega_0$  característica do confinamento do potencial de Tan-Inkson. Essas três contribuições se combinam para definir a frequência análoga à de Landau:  $\omega^2 = \omega_c^2 + 4\Omega\omega_c + \omega_0^2$ . A frequência  $\omega^*$ , por sua vez, reúne apenas as contribuições da frequência cíclotron e da rotação da seguinte forma:  $\omega^* = \omega_c + 2\Omega$ . Como se pode notar, tanto  $\omega$  quanto  $\omega^*$  apresentam uma dependência direta com a velocidade de rotação  $\Omega$ , o que é um indício do grau de importância dos efeitos não-inerciais sobre a dinâmica quântica da partícula. Essa importância fica claramente evidenciada na equação (1.62), onde podemos perceber que, mesmo na ausência de campos magnéticos, a rotação  $\Omega$  e a contribuição do confinamento do potencial de Tan-Inkson  $\omega_0$  são suficientes para definir um espectro de energia quantizado.

Um teste da validade do nosso resultado é que se considerarmos que a partícula encontra-se livre do confinamento de Tan-Inkson ( $\omega_0 = 0$ ) e na ausência de rotação ( $\Omega = 0$ ), recuperamos exatamente os níveis de Landau (1.7).

Logo após a obtenção dos autovalores de energia, calculamos, com o auxílio da relação de Byers-Yang, a corrente persistente associada à partículas carregadas confinadas em anéis quânticos girantes (1.71):

$$I_{n,m,k} = \frac{e\omega}{4\pi} \left( \frac{|m - \beta k - \ell|}{L} - \frac{\omega^*}{\omega} \right). \quad (3)$$

Observa-se também que a corrente persistente do estado  $(n, m, k)$  é caracterizada pelas frequências  $\omega$  e  $\omega^*$ .

Analizamos também a corrente persistente para uma partícula carregada, confinada pelo potencial harmônico de um ponto quântico. Para estados que satisfazem  $m - \beta k - \ell \neq 0$ , a corrente persistente é dada pela equação (1.74), e para estados que satisfazem  $m - \beta k - \ell = 0$ , vale equação (1.75). Fazendo  $\beta \rightarrow 0$  e  $\Omega \rightarrow 0$  no caso descrito pela equação (1.75), recuperamos o mesmo resultado obtido em [14] por Avishai e Kohmoto para pontos quânticos na presença de um campo magnético intenso.

Mais uma vez, ressaltamos que, mesmo na ausência de campo magnético, a contribuição do confinamento de Tan-Inkson  $\omega_0$  e da rotação  $\Omega$  sobre a corrente persistente de anéis e pontos quânticos são muito importantes, conforme podemos conferir nas equações (1.76), (1.77) e (1.78).

Também calculamos a magnetização para uma partícula carregada, confinada em um anel quântico girante (1.83). Através de uma análise cuidadosa da equação (1.83), escrevemos a magnetização de uma forma mais conveniente:

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = \mathcal{M}_{n,m,k}^{CL} + \mathcal{M}_{n,m,k}^{DS} + \mathcal{M}_{n,m,k}^{DSR}, \quad (4)$$

onde

$$\mathcal{M}_{n,m,k}^{CL} = \pi r_{n,m,k}^2 I_{n,m,k} \quad (5)$$

é uma contribuição semelhante a do momento de dipolo de uma espira circular [55] de raio  $r_{n,m,k}$  percorrida por uma corrente  $I_{n,m,k}$ ,

$$\mathcal{M}_{n,m,k}^{DS} = -2\mu_B \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\omega_c}{\omega} \quad (6)$$

é o termo de shift diamagnético associado com o campo magnético e

$$\mathcal{M}_{n,m,k}^{DSR} = -\mu_B \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\Omega}{\omega}, \quad (7)$$

representa uma espécie de deslocamento diamagnético, só que sua origem não é magnética, mas sim puramente não-inercial.

A magnetização para esse sistema (1.83) é da ordem do magneton de Bohr (1.84). De acordo com a equação (6), a contribuição do shift diamagnético é mais apreciável do que a contribuição puramente não-inercial descrita na equação (7). No entanto, na ausência de campo magnético ( $\omega_c = 0$ ),  $\mathcal{M}_{n,m,k}^{DS} \rightarrow 0$  e a contribuição da rotação nos termos (5) e (7) se torna considerável.

No capítulo (2), nos dedicamos ao estudo da dinâmica quântica de uma partícula neutra confinada pelo potencial de um anel quântico girante, na presença de um defeito topológico. Essa partícula apresenta momento de dipolo magnético permanente e interage com duas distribuições de cargas elétricas: a primeira consiste em uma linha de cargas colocada no centro do anel a fim de introduzir um fluxo Aharonov-Casher [56]; já a segunda distribuição é responsável por gerar um campo elétrico não usual responsável pela quantização análoga à de Landau para partículas neutras [59]. A interação dessa partícula com a configuração de campo é descrita pelo potencial vetor efetivo apresentado na equação (2.13).

Ao resolvermos a equação de Schrödinger independente do tempo associada ao Hamiltoniano (2.50), obtivemos o seguinte espectro de energia (2.66):

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2} (m - \beta k - \ell^*) \omega^* + \frac{1}{2} \omega_{AC} - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{k^2}{2m^*}, \quad (8)$$

onde

$$\ell^* = \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \quad (9)$$

foi introduzido para simplificar a notação.

Comparando as equações (1) e (8), observa-se uma analogia perfeita entre partículas carregadas e neutras, uma vez que existe uma semelhança muito estreita na forma funcional dessas duas equações. No entanto, aparece uma contribuição a mais  $\left( \frac{1}{2} \omega_{AC} \right)$  na equação (8). Essa contribuição é característica da interação de partículas neutras e é proveniente do termo  $\frac{\mu}{2m^*} \nabla \cdot \mathbf{E}$  do Hamiltoniano (2.14). As frequências que caracterizam o espectro para o dipolo magnético (8) são três: a frequência de Aharonov-Casher  $\omega_{AC}$ , a frequência de rotação do sistema de referência não-inercial  $\Omega$  e a frequência característica do confinamento do anel quântico  $\omega_0$ . Essas frequências se combinam para definir  $\omega^2 = \omega_{AC}^2 + 4\Omega\omega_{AC} + \omega_0^2$  e  $\omega^* = \omega_{AC} + 2\Omega$ . A contribuição do fluxo de Aharonov-Casher (associado ao parâmetro  $\ell^*$ ) e da deslocação tipo-hélice (associada ao parâmetro  $\beta$ ) é de alterar o número quântico  $m$  para  $m - \beta k - \ell^*$ . Vale a pena verificar que para  $\beta = 0$ ,  $\omega_0 = 0$  e  $\Omega = 0$ , recuperamos os resultados obtidos por Ribeiro et. al [59].

Continuando com os paralelos entre o dipolo magnético e a partícula carregada, calculamos a corrente persistente (2.77) e a magnetização (2.87) a partir do espectro de energia (8). Esses resultados não são meras analogias. A corrente persistente nesse caso é entendida como uma corrente de spin [63, 64, 65, 66] e a magnetização resulta de um

efeito coletivo associado ao alinhamento dos momentos de dipolo das partículas neutras. Enfatizamos que essas grandezas são também fortemente influenciadas pela presença de efeitos não-inerciais.

No capítulo (3), continuando o estudo de analogias entre partículas carregadas e neutras, investigamos os efeitos da rotação sobre a dinâmica quântica de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico permanente não nulo que interage com duas distribuições de cargas magnéticas: a primeira consiste em uma linha de monopolos magnéticos colocada no centro do anel a fim de introduzir um fluxo He-McKellar-Wilkins [67, 68], já a segunda distribuição é responsável por gerar um campo magnético não usual responsável pela quantização análoga à de Landau para o dipolo elétrico [59].

Como pode-se observar, os níveis de energia para o dipolo elétrico permanente

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2} (m - \beta k - \ell^*) \omega^* - \frac{1}{2} \omega_{HMW} - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{k^2}{2m^*}, \quad (10)$$

onde

$$\ell^* = \ell \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \quad (11)$$

foi introduzido para simplificar a notação, apresentam a mesma forma funcional que os níveis de energia para o dipolo magnético (8), só que as frequências que caracterizam a dinâmica do dipolo elétrico são: a frequência de He-McKellar-Wilkins  $\omega_{HMW}$ , a frequência de rotação  $\Omega$  e a frequência do potencial de Tan-Inkson. Essas três frequências se combinam para definir a frequência  $\omega^2 = \omega_{HMW}^2 - 4\Omega + \omega_0^2$ . Já a frequência  $\omega^* = 2\Omega - \omega_{HMW}$ . O fluxo He-McKellar-Wilkins, junto com a deslocação, contribuem apenas em alterar o número quântico  $m$ .

Também obtivemos expressões análogas para a corrente persistente (3.77) e para a magnetização (3.87) para o dipolo elétrico permanente e, mais uma vez, mostramos que essas propriedades sofrem influências da rotação. A título de comparação, as equações (2.92) e (3.92) apresentam a mesma forma funcional do shift diamagnético (1.89), com apenas dois termos adicionais que são característicos da interação de dipolos magnéticos e elétricos.

Por fim, estudamos no capítulo (4) os efeitos não-inerciais sobre a dinâmica quântica de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido com base na interação proposta por Wei-Han-Wei [69]. Como o sistema estudado no capítulo (3) prevê a utilização de monopolos magnéticos, a sua verificação experimental fica inviável. Sendo assim, investigamos as propriedades de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido pelo acoplamento de Wei-Han-Wei [69]. Diferente do que foi feito na literatura [70] e [73], utilizamos Hamiltoniano Wei-Han-Wei modificado [69, 71, 72], que permite evitar problemas de convergência na resolução da equação de Schrödinger.

O espectro de energia para o dipolo elétrico induzido é (4.69):

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega - \frac{1}{2} (m - \beta k - \ell^*) \omega^* - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{k^2}{2m^*}, \quad (12)$$

onde

$$\ell^* = \ell \frac{\phi_{WHW}}{2\pi} \quad (13)$$

foi introduzido para simplificar a notação e  $\omega^2 = \omega_{WHW}^2 + 4\Omega\omega_{WHW} + \omega_0^2$  e  $\omega^* = \omega_{WHW} + 2\Omega$ . Da mesma forma que nos casos anteriores, a dinâmica quântica da partícula é caracterizada por três frequências: a frequência de Wei-Han-Wei  $\omega_{WHW}$ , a frequência de rotação do sistema de referência  $\Omega$  e a frequência que caracteriza o confinamento do anel quântico  $\omega_0$ .

Um resultado muito interessante se obtém quando se desconsidera a contribuição de Wei-Han-Wei ( $\omega_{WHW} \rightarrow 0$ ):

$$\mathcal{E}_{n,m,k} = \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega_0 - (m - \beta k - \ell^*) \Omega - \frac{m^*}{4} \omega_0^2 r_0^2 + \frac{k^2}{2m^*}. \quad (14)$$

A única diferença entre esse resultado e o resultado para partículas carregadas (1.62) está na contribuição dos fluxos Aharonov-Bohm (associado com o parâmetro  $\ell$ ) e Wei-Han-Wei (associado com o parâmetro  $\ell^*$ ). Se desconsiderarmos essas duas contribuições nas equações (1.62) e (14), concluímos que não há distinção entre partículas carregadas e neutras - quantização em níveis discretos de energia é garantida pelo confinamento de Tan-Inkson e pela presença da rotação do anel quântico. Essa análise também é válida para o dipolo magnético (2.68) e para o dipolo elétrico permanente (4.71).

Assim como nos capítulos anteriores, determinamos, para o dipolo elétrico induzido, as expressões para a corrente persistente (4.80)

$$I_{n,m,k} = \frac{\omega}{4\pi} \left( \frac{|m - \beta k - \ell^*|}{L} - \frac{\omega^*}{\omega} \right), \quad (15)$$

e para a da magnetização (4.90)

$$\mathcal{M}_{n,m,k} = -\frac{1}{m^*} \left[ \left( n + \frac{|L|}{2} + \frac{1}{2} \right) \left( 1 + 2\frac{\Omega}{\omega_{WHW}} \right) \frac{\omega_{WHW}}{\omega} - \frac{1}{2} (m - \beta k - \ell^*) \right]. \quad (16)$$

Não diferente dos casos anteriores, a rotação desempenha um papel muito importante sobre a corrente persistente e a magnetização, tendo em mente que a rotação está presente nas frequências  $\omega$  e  $\omega^*$

Em suma, quando certas circunstâncias são atendidas, partículas neutras e carregadas se comportam de maneira equivalente do ponto de vista quântico quer seja sobre a influência de efeitos não-inerciais ou sobre a influência de defeitos topológicos. Analisamos neste trabalho, a dinâmica quântica de partículas carregadas e neutras, confinadas em um anel quântico girante. Mostramos que os efeitos não-inerciais associados à rotação

desempenham um papel muito importante sobre propriedades físicas como o espectro de energia, corrente persistente e magnetização. Além de anéis quânticos, analisamos o comportamento da corrente persistente em pontos quânticos, para os quatro sistemas aqui estudados.

Desta tese, os resultados apresentados no capítulo (1) foram publicados na seguinte referência [47] e os resultados dos demais capítulos estão sob fase de submissão e em breve serão publicados [48, 49, 50]. Nossas perspectivas são de estender esses resultados para sistemas mais realísticos, uma vez que os resultados aqui obtidos se aplicam para sistemas de apenas uma partícula. A ideia consiste em fazer um tratamento análogo ao feito por Tan e Inkson [12] para investigar numericamente oscilações na corrente persistente e na magnetização em função da rotação.

# Referências

- [1] FUHRER, A. et al. Energy spectra of quantum rings. *Nature*, v. 413, n. 6858, p. 822–825, 2001. Cited By 314.
- [2] BATELAAN, H.; TONOMURA, A. The Aharonov–Bohm effects: Variations on a subtle theme. *Physics Today*, v. 62, p. 38–43, September 2009.
- [3] TONOMURA, A. et al. Evidence for aharonov-bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave. *Phys. Rev. Lett.*, v. 56, p. 792–795, Feb 1986.
- [4] COOPER, N. R.; WILKIN, N. K.; GUNN, J. M. F. Quantum phases of vortices in rotating bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 87, p. 120405, Aug 2001.
- [5] RONCAGLIA, M.; RIZZI, M.; DALIBARD, J. From rotating atomic rings to quantum hall states. *Scientific Reports*, v. 1, 2011. Cited By 12.
- [6] FETTER, A. L. Rotating trapped bose-einstein condensates. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 81, p. 647–691, May 2009.
- [7] IHN, T. et al. Marvellous things in marvellous rings: energy spectrum, spins and persistent currents. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, v. 16, n. 1, p. 83 – 89, 2003. Proceedings of the Twelfth International Winterschool on New Developments in Solids State Physics,.
- [8] AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, v. 115, n. 3, p. 485–491, 1959.
- [9] KEYSER, U. et al. Aharonov-bohm oscillations of a tuneable quantum ring. *Semiconductor Science and Technology*, v. 17, n. 5, p. L22–L24, 2002. Cited By 0.
- [10] HALPERIN, B. Quantized hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential. *Physical Review B*, v. 25, n. 4, p. 2185–2190, 1982. Cited By 0.
- [11] MEIR, Y.; ENTIN-WOHLMAN, O.; GEFEN, Y. Magnetic-field and spin-orbit interaction in restricted geometries: Solvable models. *Physical Review B*, v. 42, n. 13, p. 8351–8360, 1990. Cited By 0.
- [12] TAN, W.-C.; INKSON, J. C. Magnetization, persistent currents, and their relation in quantum rings and dots. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 60, p. 5626–5635, Aug 1999.
- [13] AVISHAI, Y.; HATSUGAI, Y.; KOHMOTO, M. Persistent currents and edge states in a magnetic field. *Physical Review B*, v. 47, n. 15, p. 9501–9512, 1993. Cited By 0.
- [14] AVISHAI, Y.; KOHMOTO, M. Quantized persistent currents in quantum dot at strong magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 71, p. 279–282, Jul 1993.

- [15] CHANDRASEKHAR, V. et al. Magnetic response of a single, isolated gold loop. *Physical Review Letters*, v. 67, n. 25, p. 3578–3581, 1991. Cited By 0.
- [16] BERRY, M.; KEATING, J. Persistent current flux correlations calculated by quantum chaology. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 27, n. 18, p. 6167–6176, 1994. Cited By 0.
- [17] IHN, T. et al. Spin effects in a quantum ring. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, v. 26, n. 1-4, p. 225–230, 2005. Cited By 6.
- [18] FUHRER, A. et al. Energy spectra of quantum rings. *Microelectronic Engineering*, v. 63, n. 1-3, p. 47–52, 2002. Cited By 7.
- [19] TEODORO, M. D. et al. In-plane mapping of buried InGaAs quantum rings and hybridization effects on the electronic structure. *Journal of Applied Physics*, v. 112, n. 1, p. –, 2012.
- [20] VIEFERS, S. et al. Quantum rings for beginners: Energy spectra and persistent currents. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, v. 21, n. 1, p. 1–35, 2004. Cited By 98.
- [21] MANNINEN, M.; VIEFERS, S.; REIMANN, S. Quantum rings for beginners ii: Bosons versus fermions. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, v. 46, n. 0, p. 119 – 132, 2012. ISSN 1386-9477.
- [22] TAN, W.-C.; INKSON, J. C. Electron states in a two-dimensional ring - an exactly soluble model. *Semicond. Sci. Technol.*, v. 11, p. 1635–1641, 1996.
- [23] LIU, J. et al. Correlations between aharonov-bohm effects and one-dimensional subband populations in  $\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  rings. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 48, p. 15148–15157, Nov 1993.
- [24] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Mechanics*. 3rd. ed. New York: Pergamon Press, 1980. 126-129 p.
- [25] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Statistical Physics - Part 1*. 3rd. ed. New York: Pergamon Press, 1980. 74-76 p.
- [26] KATANAEV, M.; VOLOVICH, I. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity. *Annals of Physics*, v. 216, n. 1, p. 1–28, 1992. Cited By 0.
- [27] FURTADO, C.; MORAES, F. On the binding of electrons and holes to disclinations. *Physics Letters A*, v. 188, n. 4-6, p. 394–396, 1994. Cited By 0.
- [28] FURTADO, C. et al. Landau levels in the presence of disclinations. *Physics Letters A*, v. 195, n. 1, p. 90–94, 1994. Cited By 0.
- [29] FURTADO, C.; MORAES, F. Landau levels in the presence of a screw dislocation. *Europhysics Letters*, v. 45, n. 3, p. 279–282, 1999. Cited By 0.
- [30] AZEVEDO, S.; MORAES, F. Topological aharonov-bohm effect around a disclination. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 246, n. 3-4, p. 374–376, 1998. Cited By 0.



- [31] AZEVEDO, S.; PEREIRA, J. Double aharonov-bohm effect in a medium with a disclination. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 275, n. 5-6, p. 463–466, 2000. Cited By 0.
- [32] RIBEIRO, C. D. L.; FURTADO, C.; MORAES, F. Solid-state analog for the he-mckellar-wilkens quantum phase. *Europhysics Letters*, v. 62, n. 3, p. 306–312, 2003. Cited By 0.
- [33] RIBEIRO, C. D. L.; CARVALHO, A. D.; FURTADO, C. Quantum scattering of an electric dipole by a charged screw dislocation. *Progress of Theoretical Physics*, v. 124, n. 4, p. 547–553, 2010. Cited By 0.
- [34] KAWAMURA, K. Scattering of a tight-binding electron off an edge dislocation. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, v. 48, n. 3, p. 201–207, 1982. Cited By 0.
- [35] BAUSCH, R.; SCHMITZ, R.; TURSKI, A. Single-particle quantum states in a crystal with topological defects. *Physical Review Letters*, v. 80, n. 11, p. 2257–2260, 1998. Cited By 0.
- [36] BAUSCH, R.; SCHMITZ, R.; TURSKI, A. Quantum motion of electrons in topologically distorted crystals. *Annalen der Physik (Leipzig)*, v. 8, n. 3, p. 181–189, 1999. Cited By 0.
- [37] BAUSCH, R.; SCHMITZ, R.; TURSKI, L. Scattering of electrons on screw dislocations. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics*, v. 59, n. 21, p. 13491–13493, 1999. Cited By 0.
- [38] TURSKI, A.; BAUSCH, R.; SCHMITZ, R. Gauge theory of sound propagation in crystals with dislocations. *Journal of Physics Condensed Matter*, v. 19, n. 9, 2007. Cited By 0.
- [39] BATISTA, C. D. S.; LI, D. Analytic calculations of trial wave functions of the fractional quantum hall effect on the sphere. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics*, v. 55, n. 3, p. 1582–1595, 1997. Cited By 0.
- [40] CAREY, A. et al. Quantum hall effect on the hyperbolic plane. *Communications in Mathematical Physics*, v. 190, n. 3, p. 629–673, 1998. Cited By 0.
- [41] LEADBEATER, M. et al. Electron transport in a non-uniform magnetic field. *Journal of Physics: Condensed Matter*, v. 7, n. 25, p. L307–L315, 1995. Cited By 0.
- [42] ENTIN, M.; MAGARILL, L. Spin-orbit interaction of electrons on a curved surface. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics*, v. 64, n. 8, p. 853301–853305, 2001. Cited By 0.
- [43] BULAEV, D.; GEYLER, V.; MARGULIS, V. Magnetic response for an ellipsoid of revolution in a magnetic field. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics*, v. 62, n. 17, p. 11517–11526, 2000. Cited By 0.
- [44] AURELL, E. Torsion and electron motion in quantum dots with crystal lattice dislocations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 32, n. 4, p. 571–584, 1999. Cited By 0.

- [45] FURTADO, C.; ROSAS, A.; AZEVEDO, S. Landau quantization and curvature effects in a two-dimensional quantum dot. *Europhys. Lett.*, v. 79, 2007. Cited By 0.
- [46] NETTO, A.; CHESMAN, C.; FURTADO, C. Influence of topology in a quantum ring. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 372, n. 21, p. 3894–3897, 2008. Cited By 0.
- [47] DANTAS, L.; FURTADO, C.; NETTO, A. L. S. Quantum ring in a rotating frame in the presence of a topological defect. *Physics Letters A*, v. 379, n. 1–2, p. 11 – 15, 2015. ISSN 0375-9601.
- [48] DANTAS, L.; FURTADO, C. Quantum particle with a permanent magnetic dipole in a rotating quantum ring. Preprint.
- [49] DANTAS, L.; FURTADO, C. Permanent electric dipole in a rotating confining potential. Preprint.
- [50] DANTAS, L.; FURTADO, C. Quantum particle with an induced electric dipole in a rotating quantum ring. Preprint.
- [51] CHAMBERS, R. G. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. *Phys. Rev. Lett.*, v. 5, n. 1, p. 3–5, 1960.
- [52] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. 3rd. ed. New York: Pergamon Press, 1977. 458-460 p.
- [53] DIAMAGNETISMUS der Metalle. *Zeitschrift für Physik*, v. 64, n. 9-10, 1930. ISSN 0044-3328.
- [54] BYERS, N.; YANG, C. N. Theoretical considerations concerning quantized magnetic flux in superconducting cylinders. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 7, p. 46–49, Jul 1961.
- [55] JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. 3rd. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999. 183 p.
- [56] AHARONOV, Y.; CASHER, A. Topological quantum effects for neutral particles. *Phys. Rev. Lett.*, v. 53, n. 4, p. 319, 1984.
- [57] DOWLING, J. P.; WILLIAMS, C. P.; FRANSON, J. D. Maxwell duality, lorentz invariance, and topological phase. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 83, n. 13, p. 2486–2489, Sep 1999.
- [58] ERICSSON, M.; SJÖQVIST, E. Towards a quantum hall effects for atoms using electric fields. *Phys. Rev. A*, v. 65, n. 013657, 2001.
- [59] RIBEIRO, L. R.; FURTADO, C.; NASCIMENTO, J. R. Landau levels analog to electric dipole. *Phys. Lett. A*, v. 138, p. 135–140, 2005.
- [60] ANANDAN, J. Electromagnetic effects in the quantum interference of dipoles. *Phys. Rev. A*, v. 138, n. 8, p. 347, 1989.
- [61] ANANDAN, J. Classical and quantum interaction of the dipole. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 85, p. 1354–1357, Aug 2000.

- [62] BAKKE, K.; FURTADO, C. On the interaction of the dirac oscillator with the aharonov-casher system in topological defect backgrounds. *Annals of Physics*, v. 336, p. 489–504, 2013.
- [63] OH, S.; RYU, C.-M. Persistent spin currents induced by the aharonov-casher effect in mesoscopic rings. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 51, p. 13441–13448, May 1995.
- [64] MATHUR, H.; STONE, A. D. Persistent-current paramagnetism and spin-orbit interaction in mesoscopic rings. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 44, p. 10957–10960, Nov 1991.
- [65] MATHUR, H.; STONE, A. D. Quantum transport and the electronic aharonov-casher effect. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 68, p. 2964–2967, May 1992.
- [66] BALATSKY, A. V.; ALTSHULER, B. L. Persistent spin and mass currents and aharonov-casher effect. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 70, p. 1678–1681, Mar 1993.
- [67] HE, X.-G.; MCKELLAR, B. H. J. Topological phase due to electric dipole moment and magnetic monopole interaction. *Phys. Rev. A*, v. 47, n. 4, p. 3424, 1993.
- [68] WILKENS, M. Topological phase due to electric dipole moment and magnetic monopole interaction. *Phys. Rev. Lett.*, v. 72, p. 5, 1994.
- [69] WEI, H.; HAN, R.; WEI, X. Quantum phase of induced dipoles moving in a magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, v. 75, n. 11, p. 2071–2073, 1995.
- [70] RIBEIRO, L. R.; FURTADO, C.; NASCIMENTO, J. R. Landau quantization of neutral particles in an external field. *Phys. Lett. A*, v. 358, p. 336 – 338, 2006.
- [71] HAGEN, C. R. Comment on “quantum phase of induced dipoles moving in a magnetic field”. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 77, p. 1656–1656, Aug 1996.
- [72] WEI, H.; WEI, X.; HAN, R. Wei *et al.* reply:. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 77, p. 1657–1657, Aug 1996.
- [73] INDUCED electric dipole in a quantum ring. *Physics Letters A*, v. 377, n. 41, p. 2926 – 2930, 2013. ISSN 0375-9601.
- [74] ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists*. 3rd. ed. San Diego, California: Academic Press, Inc., 1985. 753 p.
- [75] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. 3rd. ed. New York: Pergamon Press, 1977. 673-681 p.



## Apêndices



# APÊNDICE A – Limites Assintóticos para a Equação Radial

## A.1 Limites Assintóticos para a Equação Radial

Considere a seguinte equação:

$$\xi \ddot{R} + \dot{R} + \left[ -\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{\ell^2}{4\xi} \right] R = 0. \quad (1)$$

Para encontrarmos uma candidata para solução da equação (1) precisamos fazer o estudo dos limites assintóticos. Para tanto, vamos escrevê-la da seguinte forma:

$$\ddot{R} + \frac{\dot{R}}{\xi} + \left[ -\frac{1}{4} + \frac{\beta}{\xi} - \frac{\ell^2}{4\xi^2} \right] R = 0. \quad (2)$$

Quando  $\xi \rightarrow 0$ , os termos dominantes são:

$$\ddot{R} + \frac{\dot{R}}{\xi} - \frac{\ell^2}{4\xi^2} R = 0, \quad (3)$$

Uma possível solução para a equação (3) tem a seguinte forma:

$$R(\xi) \approx \xi^\beta. \quad (4)$$

Substituindo a (4) na (3) segue que:

$$(\beta^2 - \beta) \xi^{\beta-2} + \beta \xi^{\beta-2} - \frac{\ell^2}{4} \xi^{\beta-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \pm \frac{\ell}{2}. \quad (5)$$

Para não termos problemas de convergência na origem, devemos desconsiderar a solução para  $\beta = -\frac{\ell}{2}$ . Sendo assim, a solução da equação (3) é dada por:

$$R(\xi) \approx \xi^{|\ell|/2}. \quad (6)$$

Para  $\xi \rightarrow \infty$ , segue que:

$$\ddot{R} - \frac{1}{4} R = 0, \quad (7)$$

Uma possível solução para a equação (7) tem a seguinte forma:

$$R(\xi) \approx e^{\beta\xi}. \quad (8)$$

Substituindo a (8) na (7) segue que:

$$\beta^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \pm \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Para não termos problemas de convergência no infinito, devemos desconsiderar a solução para  $\beta = +\frac{\ell}{2}$ . Sendo assim, a solução da equação (7) é dada por:

cuja solução é:

$$R(\xi) \approx e^{-\xi/2}. \quad (10)$$

Finalmente, a solução deve ter a seguinte forma:

$$R(\xi) = C e^{-\xi/2} \xi^{|\ell|/2} \zeta(\xi), \quad (11)$$

onde  $C$  é uma constante de normalização e  $\zeta(\xi)$  é uma função a determinar.



# APÊNDICE B – Função Hipergeométrica Confluente

## B.1 Função Hipergeométrica Confluente

A seguinte equação diferencial

$$x\ddot{y} + (c - x)\dot{y} - ay = 0 \quad (1)$$

é a equação hipergeométrica confluyente. Ela tem como solução a função hipergeométrica confluyente [74, 75], que é definida pela série

$$F(a; c; x) = 1 + \frac{a}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots, \quad (2)$$

podendo ser escrita em uma forma mais compacta:

$$F(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (3)$$

onde  $(a)_n$  e  $(c)_n$  são os símbolos de Pochhammer, os quais definimos assim:

$$\begin{aligned} (a)_n &= \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!} \\ (a)_0 &= 1. \end{aligned} \quad (4)$$

$F(a; c; x)$  converge para todo  $x$  finito; o parâmetro  $a$  é arbitrário, enquanto o parâmetro  $c$  deve ser diferente de zero ou de um inteiro negativo. Se  $a$  for um inteiro negativo (ou zero), a série se reduz a um polinômio de grau  $|a|$ .

## B.2 Integral Envolvendo a Função Hipergeométrica Confluente

A seguinte integral

$$J_b = \int_0^{\infty} e^{-kx} x^{b-1} [F(-a; c; x)]^2 dx, \quad a \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

nos vai ser muito útil na normalização da parte radial das funções de onda dos problemas aqui abordados. Ela está calculada no livro do Landau [75] e é dada por:

$$J_b = \frac{\Gamma(b)a!(c-1)!}{k^b(c+a-1)!} \left[ 1 + \sum_{s=0}^{a-1} \frac{a(a-1)\dots(a-s) \cdot (c-b-s-1)(c-b-s)\dots(c-b+s)}{[(s+1)!]^2 c(c+1)\dots(c+s)} \right]. \quad (6)$$

$$J_b = \frac{\Gamma(b)a!(c-1)!}{k^b(c+a-1)!} \cdot \left[ 1 + \sum_{s=0}^{a-1} \frac{a(a-1)\dots(a-s) \cdot (c-b-s-1)(c-b-s)\dots(c-b+s)}{[(s+1)!]^2 c(c+1)\dots(c+s)} \right]. \quad (7)$$

### B.3 Normalização

Vamos agora proceder com a normalização das partes angular e radial da função de onda. O anzats da função de onda para o nosso problema é dado por:

$$\Psi(\rho, \phi, z) = A e^{im\phi} e^{ikz} R(\rho), \quad (8)$$

onde  $A$  é uma constante de normalização e a condição de normalização impõe que

$$\int \Psi^* \Psi r dr d\phi = 1. \quad (9)$$

É conveniente normalizar as partes angular e radial separadamente. Sendo assim, temos que:

$$\left( B^2 \int_0^{2\pi} e^{-i\ell\phi} e^{i\ell\phi} d\phi \right) \left( C^2 \int_0^\infty R^*(r) R(r) r dr \right) = 1, \quad (10)$$

onde  $B$  e  $C$  são respectivamente as constantes de normalização das partes angular e radial. Sendo assim, a constante de normalização  $A$  da função de onda (8) se relaciona com as constanstes  $B$  e  $C$  assim:

$$A = B \cdot C \quad (11)$$

Da condição da parte angular segue que

$$B^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 1. \quad (12)$$

Vemos facilmente que essa constante de normalização é, portanto, igual a

$$B = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{1/2}. \quad (13)$$

Agora, para a parte radial temos que:

$$\int_0^\infty R^*(r) R(r) r dr = 1. \quad (14)$$

Introduzindo a seguinte mudança de varáveis

$$\xi = \frac{m\omega}{2} r^2 \quad (15)$$

e lembrando da definição do comprimento magnético

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{1}{m\omega}}, \quad (16)$$

a equação (14) fica assim:

$$\lambda_0^2 \int_0^\infty R^*(\xi) R(\xi) d\xi = 1. \quad (17)$$

Substituindo a equação (11) na equação (17), temos que:

$$C^2 \lambda_0^2 \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{|\ell|} [F(-n; |\ell| + 1; \xi)]^2 d\xi = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\lambda_0} \left( \frac{1}{I} \right)^{1/2}, \quad (18)$$

onde

$$I = \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{|\ell|} [F(-n; |\ell| + 1; \xi)]^2 d\xi. \quad (19)$$

A integral anterior é facilmente obtida utilizando a equação (6). Fazendo as seguintes identificações  $k = 1$ ;  $b = c = |\ell| + 1$ ;  $a = n$  e  $x = \xi$ , temos que

$$I = \frac{n! [\Gamma(|\ell| + 1)]^2}{(n + |\ell|)!}; \quad (20)$$

o que nos leva a:

$$C = \frac{1}{\lambda_0} \left[ \frac{(n + |\ell|)!}{n! [\Gamma(|\ell| + 1)]^2} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Finalmente, substituindo as equações (13) e (21) na (11) temos que a constante de normalização da função de onda é dada por:

$$A = \frac{1}{\lambda_0} \left[ \frac{(n + |\ell|)!}{2 n! [\Gamma(|\ell| + 1)\pi]^2} \right]^{1/2}. \quad (22)$$